

Capítulo 5

VORTICIDADE

Vimos que uma consideração da conservação de energia para os fluidos perfeitos nos conduziu a um importante resultado, o teorema de Bernoulli. Analogamente, neste capítulo, veremos que a conservação do momento angular em fluidos perfeitos conduz a resultados interessantes, em particular o *teorema de Kelvin* (William Thomson, lord Kelvin, 1824-1907) e o *teorema de Helmholtz* (Hermann von Helmholtz, 1821-1894). Primeiro precisamos introduzir algumas definições.

5.1 Escoamentos rotacionais e irrotacionais

Na mecânica dos fluidos, o rotacional da velocidade, $\vec{\nabla} \times \vec{v} \equiv \vec{\Omega}$, é uma quantidade que tem um papel importante e tem nome próprio: “vorticidade”.

5.1.1 O que mede o rotacional?

Em capítulos anteriores, encontramos a quantidade $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$, ou divergência do campo \vec{v} . A divergência de um campo mede o quanto ele se espalha. Na figura abaixo, tenderíamos a pensar que o escoamento de esquerda tem divergência nula enquanto o de direita teria divergência não nula.

Na realidade, para o escoamento de direita temos que estar mais cuidadoso como mostra o exemplo abaixo.

Exemplo (5.1)

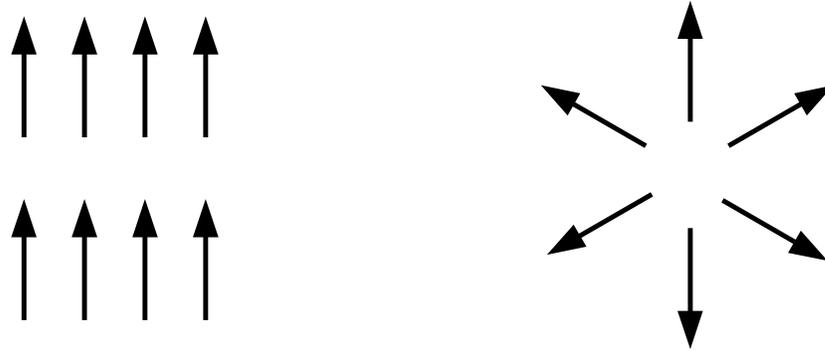


Figura 5.1: Esquerda: campo vectorial de divergência nula. Direita: a divergência pode ou não ser nula.

a) Consideremos o campo vetorial $x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$. Esboça-lo e calcular sua divergência.

b) Mesma pergunta com $(1/(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2})(x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z})$.

Solução:

a)

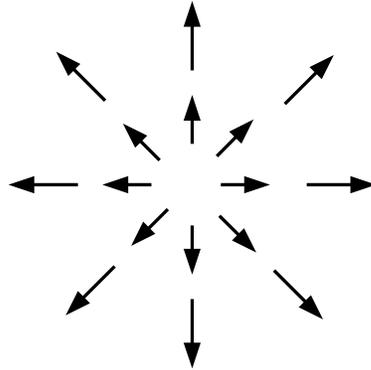


Figura 5.2: Exemplo de campo vectorial de divergência não nula.

Temos

$$\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3 \quad (5.1)$$

b)

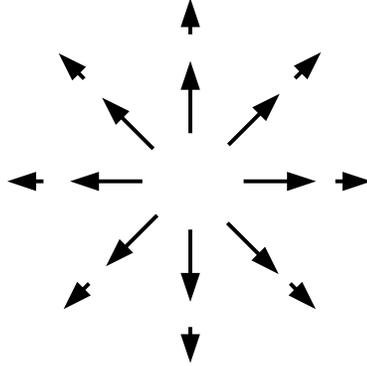


Figura 5.3: Exemplo de campo vetorial de divergência nula.

Temos

$$\begin{aligned} & \frac{\partial x/(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}{\partial x} + \frac{\partial y/(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}{\partial y} + \frac{\partial z/(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}{\partial z} \\ &= \frac{3(x^2+y^2+z^2)-3(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} = 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

Usando coordenadas esféricas, vemos que os dois campos acima são radiais i.e. do tipo $\vec{V} = V_r(r, \theta, \phi)\hat{r}$. Precisamente no a) $\vec{V} = \vec{r}$ e no b) $\vec{V} = \hat{r}/r^2$. A divergência fica $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = (1/r^2)(\partial(r^2 V_r)/\partial r)$. Vemos assim que este tipo de campo tem divergência não nula a não ser que a dependência em r de V_r seja em $1/r^2$ (o que é o caso do campo do b)).

No caso do rotacional, temos uma situação similar. O rotacional mede o quanto a matéria gira localmente. O fato de girar localmente implica o seguinte: imaginamos colocar no escoamento uma pequena roda com pás como na fig. 5.4. Em seguida tentamos determinar se a roda permanece com a mesma orientação ou gira (marcamos um dos pás para facilitar).

Na figura 5.1.1, tenderíamos a pensar que o escoamento de esquerda tem rotacional nulo enquanto que o de direita poderia ter rotacional não nulo.

De novo, para o escoamento de direita temos que estar cuidadoso como mostra o exemplo abaixo.

Exemplo (5.2)

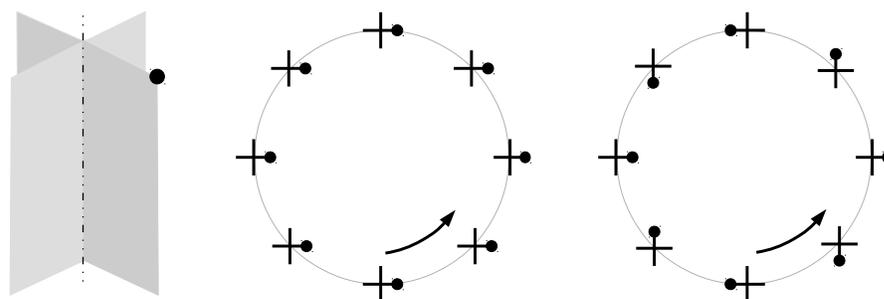


Figura 5.4: Se a roda de pás inserida no escoamento girar, o rotacional tem componente não nula perpendicular à folha.

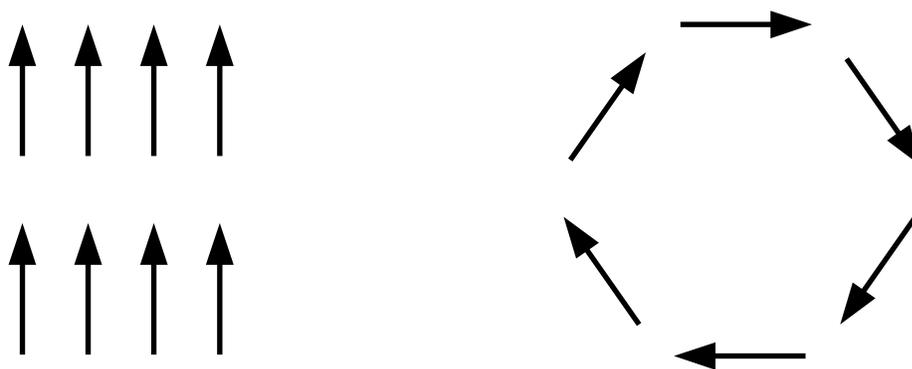


Figura 5.5: Esquerda: campo vectorial com componente do rotacional perpendicular à folha nula. Direita: esta componente pode ser não nula.

5.1. ESCOAMENTOS ROTACIONAIS E IRROTACIONAIS 117

Consideremos campos como os da figura a direita na fig. 5.1.1: $\vec{V}(r, \phi, z) = V_\phi(r)\hat{\phi}$.

a) Supor $V_\phi(r) = ar$. Esboçar o campo de velocidade e e calcular seu rotacional.

b) Mesma pergunta para $V_\phi(r) = a/r$.

Solução:

a)

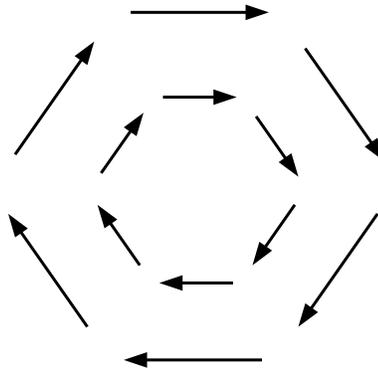


Figura 5.6: Exemplo de campo vectorial com rotacional não nula.

Temos (usando coordenadas polares ou cilíndricas)

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial r V_\phi}{\partial r} \hat{z} = 2a \hat{z} \quad (5.3)$$

b)

Temos

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial r V_\phi}{\partial r} \hat{z} = 0 \quad (5.4)$$

Olhando os esboços dos casos a) e b), vemos que a regra da roda não teria sido óbvia de usar para prever se o rotacional seria nulo ou não. Estes campos são do tipo $\vec{V} = V_\phi(r)\hat{\phi}$. O rotacional fica $\vec{\nabla} \times \vec{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial r V_\phi}{\partial r} \hat{z} = 0$. Vemos assim que este tipo de campo tem rotacional não nulo a não ser que a dependência em r de $V_\phi(r)$ seja em $1/r$ (o que é o caso do campo do b)).

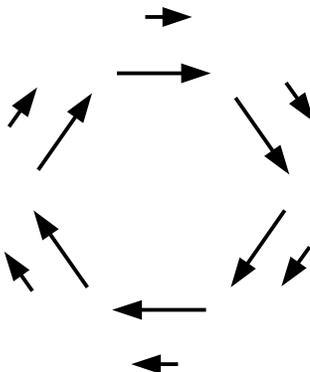


Figura 5.7: Exemplo de campo vectorial com rotacional nulo.

5.1.2 Exemplos concretos simplês

Rotação com velocidade angular constante ou de corpo rígido

Consideremos um recipiente contendo um líquido em rotação uniforme com velocidade angular ω (cf. fig. 5.8):

$$\vec{v} = \omega r \hat{\phi}. \quad (5.5)$$

As linhas de corrente são circulares. A vorticidade é $\vec{\Omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v} = 2\omega \hat{z}$, i.e. perpendicular à folha.

Este tipo de rotação já foi encontrado no capítulo III. Vimos que podia ser tratado como um problema de estática introduzindo uma força inercial $\rho\omega^2 r \hat{r}$, ou alternativamente de dinâmica (exemplo 3.2). Em ambos casos (claro), a solução da equação de Euler leva a $p(r, z) = p_0 - \rho g z + (1/2)\rho\omega^2 r^2$ e a superfície livre é uma parabolóide dada por $z = \omega^2 r^2 / (2g)$, i.e. a altura do fluido z cresce como r^2 .

Rotação tipo redemoinho

Consideremos agora outro escoamento com linhas de correntes circulares e $|\vec{v}|$ função só de r , (de modo que $\vec{v} = v(r)\hat{\phi}$):

$$\vec{v} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \hat{\phi}. \quad (5.6)$$

Neste caso, temos $\vec{\Omega} = 0$.

A figura embaixo 5.9 mostra uma realização prática deste tipo de escoamento: um líquido escapa de um recipiente por uma tampa no fundo.

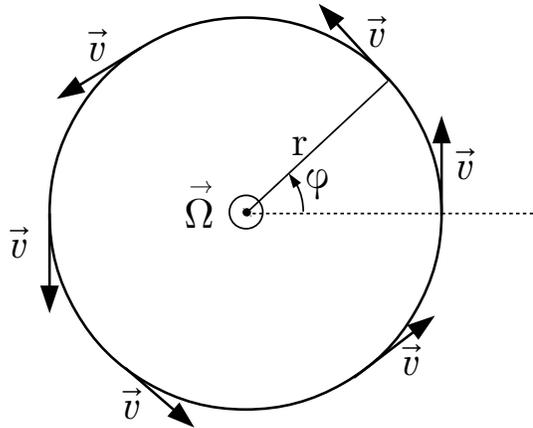


Figura 5.8: Movimento de corpo rígido $\vec{v} = r\omega\hat{\theta}$.

Forma-se um redemoinho (similar ao de uma banheira que se esvazia) em que a velocidade aumenta à medida que se aproxima do eixo.

Exemplo (5.3)

Calcular a forma da superfície livre deste escoamento supondo o fluido incompressível.

Solução:

Para um fluido incompressível, usando o fato que o escoamento é irrotacional, podemos usar a fórmula de Bernoulli no espaço todo (exceto $r=0$). Obtemos:

$$p/\rho + gz + \Gamma^2/(4\pi^2 r^2) = cste \quad (5.7)$$

A superfície livre assume uma forma afunilada que podemos determinar usando $p = p_0$ (pressão atmosférica) constante nela. Temos

$$z + \frac{\Gamma^2}{8\pi^2 gr^2} = cste' \quad (5.8)$$

daí

$$z = cste' - \frac{\Gamma^2}{8\pi^2 gr^2}. \quad (5.9)$$

O líquido ocupa a região externa ao funil centrado no eixo excluindo a singularidade em $r = 0$. A altura do fluido z varia como $1/r^2$.

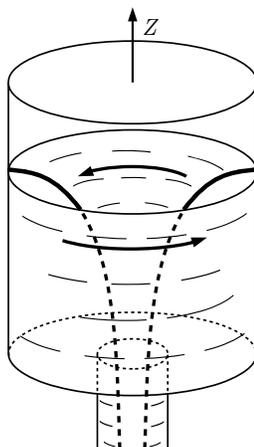


Figura 5.9: Exemplo de movimento do tipo redemoinho. Na foto, duas garrafas pets, sendo uma sem fundo, são juntadas pelas tampas - coladas e furadas. Despejamos água na de cima e damos um pequeno movimento de rotação nela.

Vórtice de Rankine

Este escoamento é uma combinação dos dois anteriores (em duas dimensões). Ele é definido por

$$\vec{v} = \begin{cases} \omega r \hat{\phi} & \text{se } r \leq R \\ \Gamma/(2\pi r) \hat{\phi} & \text{se } r \geq R \end{cases} \quad (5.10)$$

Exemplo (5.4)

Em março de 2004, o ciclone Catarina atingiu a região sul do Brasil. Foi o primeiro ciclone tropical a ser registrado oficialmente no Atlântico Sul. No pico de intensidade (28 de março), ventos de 160 km/h teriam sido alcançados.

Um ciclone tropical origina sobre águas tropicais quentes, é um sistema de nuvens compacto circular. Ventos fortes circulam em volta de uma região central calma de baixa pressão, chamada o olho do ciclone. Para ter uma ideia das escalas envolvidas, num ciclone intenso (furacão), os ventos aumentam em intensidade do centro do ciclone até atingir seu máximo acima de 100 km/h na “parede” do olho, localizada a uns 15-30 km do centro e diminuem para

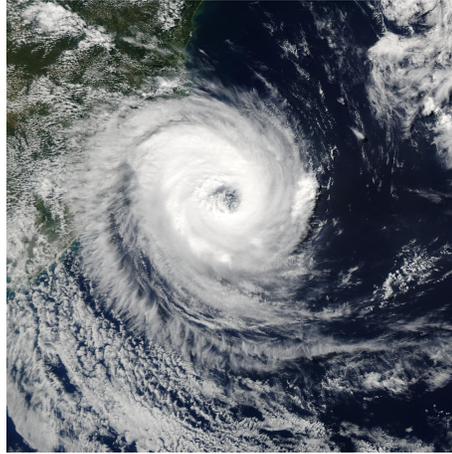


Figura 5.10: Furacão Catarina perto da costa brasileira. Crédito: J. Schmaltz, MODIS Land Rapid Response Team at NASA GSFC.

raios maiores (até uns 150 km). O objetivo deste exemplo é apresentar um modelo simplês para este fenômeno (um modelo um pouco mais elaborado é apresentado no exercício 9).

Modelizamos um ciclone por um escoamento perfeito incompressível do tipo vórtice de Rankine.

a) Calcular Γ impondo a continuidade da velocidade. Plotar $v(r)$. Qual é a forma das trajetórias do vento?

b) Desprezando a gravidade, obter $p(r)$ e plotar esta função. Calcular o valor mínimo da pressão no caso do furacão Catarina.

Solução:

a) Precisamos ter $\omega R = \Gamma/(2\pi R)$ i.e. $\Gamma = \omega 2\pi R^2$.

v não depende de t , de modo que trajetórias e linhas de corrente coincidem e são círculos.

b) Temos $d\vec{v}/dt = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = (v/r \partial_\phi)(v(r)\hat{\phi}) = -v^2/r\hat{r}$ e $d\vec{v}/dt = -\vec{\nabla}p/\rho = -1/\rho \partial p / \partial r \hat{r}$. Integrando e usando $p(\infty) = p_{atm}$ bem como a continuidade de p temos $p(r) = \rho\omega^2 r^2/2 + p_{atm} - \rho\omega^2 R^2$ se $r \leq R$ e $p(r) = -\rho\omega^2 R^4/(2r^2) + p_{atm}$ se $r \geq R$.

Usando $v_{max} = v(R) = R\omega = 160 \text{ km/h}$ obtemos $p_{min} = p(r=0) = p_{atm} - \rho\omega^2 R^2 \sim 10^5 - 1 \times (160 \cdot 10^3/3600)^2 \sim 0,98 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$.

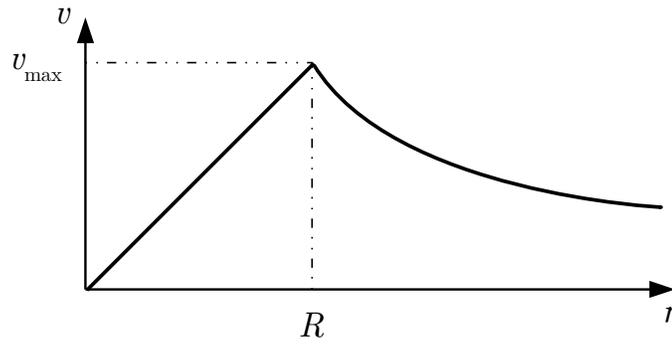


Figura 5.11: Velocidade do vórtice de Rankine. A velocidade do fluido é nula no centro do chamado “olho”, na região central (que é relativamente calma).

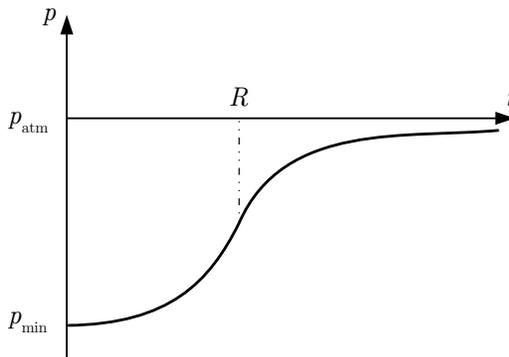


Figura 5.12: Pressão do vórtice de Rankine. Devido à diferença de pressão, ar é aspirado das partes externas para a região central.

5.1.3 Linhas e tubos de vórtice

Analogamente à linha de corrente, podemos definir uma **linha de vórtice** ou **vortex** como sendo uma linha tangente a $\vec{\Omega}$ em todos os pontos num dado instante. Similarmente também sua equação pode ser obtida com $d\vec{l}/ds = \vec{\Omega}$. Por exemplo para a rotação de corpo rígido $\vec{v} = \omega r \hat{\theta}$, as linhas de corrente são círculos de raio r . Como $\vec{\Omega} = 2\omega \hat{z}$, as linhas de vórtice são linhas paralelas a Oz .

Da mesma maneira que tubos de corrente, podemos também considerar **tubos de vórtice** formados de linhas de vórtice.

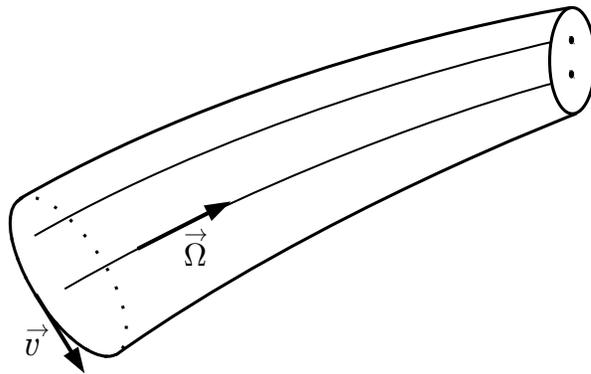


Figura 5.13: Tubo de vórtice.

Vários tipos de tubos de vórtice podem ser observados na vida de cada dia. Anéis de fumaça são às vezes produzidos por chaminês, vulcanos, fumantes. Este tipo de anéis também pode ser produzido no laboratório como mostrado na figura 5.14. Golfinhos e certas baleias são capazes de produzir anéis de ar. Pode-se encontrar vários filmes sobre isto na internet. O artigo [1] apresenta uma explicação interessante de como eles fazem, tipos de bolha, física envolvida.

Outro tipo de tubo de vórtice são os tornados. A configuração do tubo é mostrada na figura 5.15.

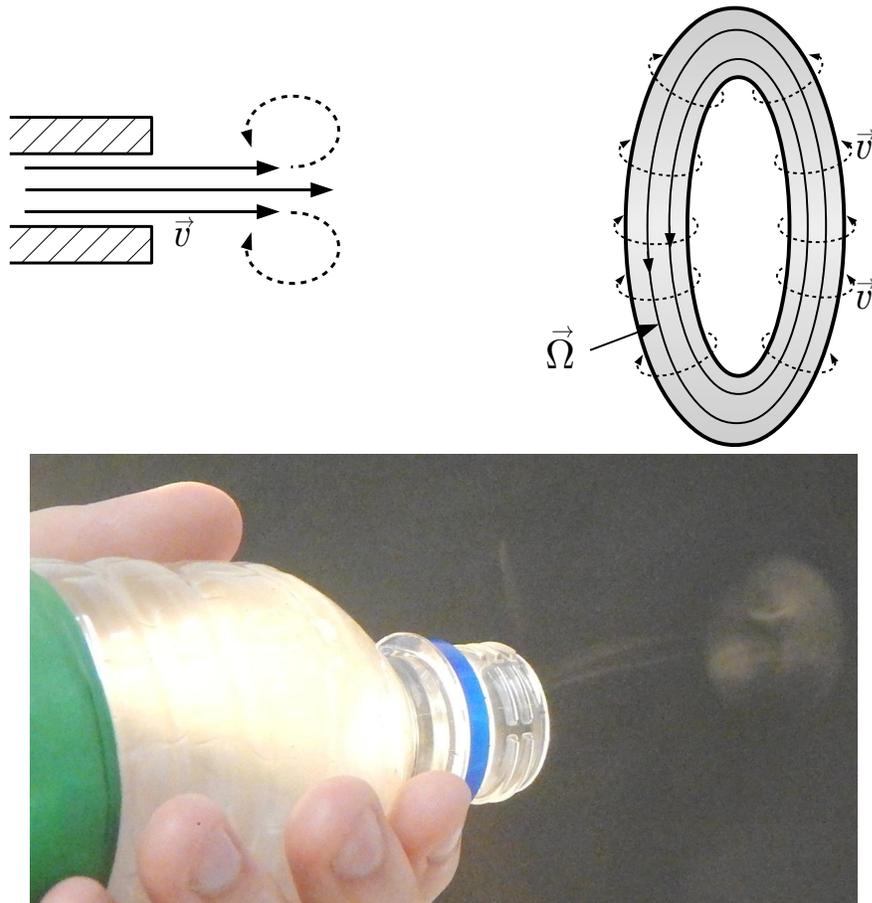


Figura 5.14: Mecanismo para formação de tubo de vórtices: devido à viscosidade, a velocidade diminui nas bordas do jato saindo da abertura, o que gera um movimento de rotação. Demonstração. Uma garrafa pet é cortada na metade e esta extremidade é coberta por um pedaço de bexiga. Em seguida introduz-se fumaça com um bastão de incenso aceso. Finalmente bate-se na parte coberta por bexiga para ver anéis escapando.

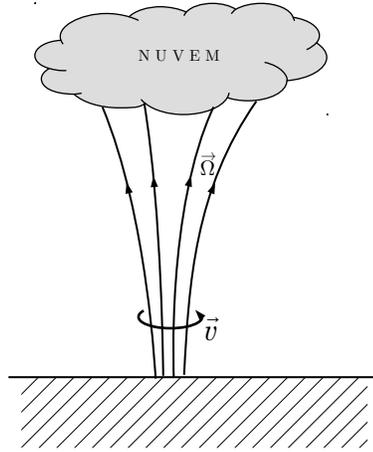


Figura 5.15: Outro exemplo do tubo de vórtice: um tornado.

5.1.4 Equação de movimento para a vorticidade

Para um fluido incompressível, usando

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \times \vec{v} + \frac{1}{2}\vec{\nabla}v^2, \quad (5.11)$$

a equação de Euler pode ser re-escrita

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \times \vec{v} = -\vec{\nabla} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right). \quad (5.12)$$

Aplicando $\vec{\nabla} \times$ a ambos lados, temos

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times (\vec{\Omega} \times \vec{v}) = 0. \quad (5.13)$$

Vemos que esta equação só envolve $\vec{\Omega}$ e \vec{v} . Usando a igualdade

$$\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{\nabla} \cdot \vec{B})\vec{A} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} \quad (5.14)$$

podemos re-escrever 5.13 na forma de uma equação de movimento para $\vec{\Omega}$ para fluido incompressível

$$\frac{d\vec{\Omega}}{dt} = (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}. \quad (5.15)$$

(onde usamos $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ para fluido incompressível bem como a identidade $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$.)

Podemos entender melhor esta equação usando como base \hat{s} (onde $d\vec{s}$ é tangente à linha de vorticidade) mais 2 versores perpendiculares à linha de vorticidade \hat{p}_1 e \hat{p}_2 . $\vec{\Omega} = \Omega\hat{s}$ de modo que a equação 5.15 fica

$$\frac{d\vec{\Omega}}{dt} = \Omega \frac{\partial \vec{v}}{\partial s}. \quad (5.16)$$

$\partial v_s / \partial s$ representa o aumento de v_s ao longo da linha de vorticidade, i.e. o alongamento desta linha. $\partial v_{p_1} / \partial s$ e $\partial v_{p_2} / \partial s$ representam mudanças da velocidade na direção normal à linha de vorticidade, i.e. a inclinação desta linha.

5.2 Teorema da circulação de Kelvin

5.2.1 Definição da circulação

Uma grandeza importante para caracterizar um escoamento é a circulação da velocidade. A *circulação* Γ ao longo de uma curva fechada orientada C é definida como:

$$\Gamma = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{l} \quad (5.17)$$

onde \vec{v} é a velocidade do fluido e $d\vec{l}$ o elemento de linha ao longo de C , orientado no sentido positivo do percurso, cf. fig. 5.16. Para calcular a circulação só importa a componente da velocidade ao longo do caminho.

Exemplo (5.5)

a) Calcular a circulação sobre um círculo centrado em O para um escoamento com rotação ao redor de O do tipo a) corpo rígido, b) redemoinho.

Solução:

a) Temos $\vec{v} = \omega r \hat{\phi}$ e $d\vec{l} = r d\phi \hat{\phi}$. Assim $\Gamma_{circ} = vr \oint_L d\phi = vr \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi r^2 \omega$ que podemos re-escrever $\Gamma_{circ} = \Omega S_{circ}$ onde S_{circ} é a superfície delimitada pelo círculo .

b) Temos $\vec{v} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \hat{\phi}$ e $d\vec{l} = r d\phi \hat{\phi}$. Assim $\Gamma_{circ} = vr \oint_L d\phi = vr \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi vr = \Gamma$. Neste caso, a circulação sobre qualquer círculo centrado em O

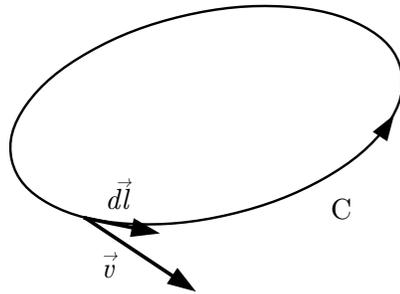


Figura 5.16: Caminho C para o cálculo da circulação.

vale Γ qualquer que seja o raio do círculo. Não podemos escrever a circulação na forma ΩS_{circ} pois a velocidade e o rotacional não são definidos em $r = 0$.

Exemplo (5.6)

a) Calcular a circulação sobre o circuito ABCDA da figura 5.17 para um escoamento com rotação ao redor de O do tipo a) corpo rígido, b) redemoinho.

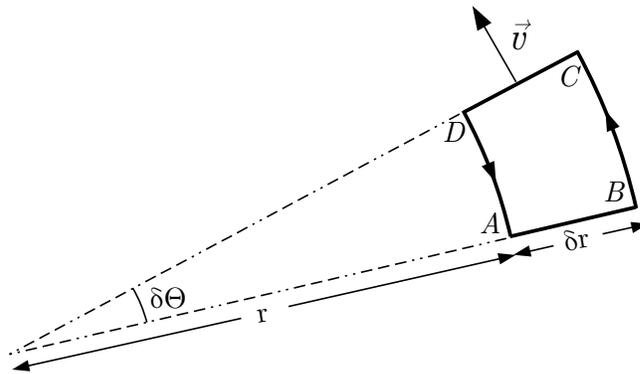


Figura 5.17: Caminho ABCDA.

Solução:

a) $\Gamma_{ABCD} = \oint_{ABCD} \vec{v} \cdot d\vec{l}$. Como \vec{v} é perpendicular a AB e DC, a contribuição destes trechos à integral é nula.

$$\Gamma_{ABCD A} = -\int_{\delta\theta}^0 v(r)rd\theta + \int_0^{\delta\theta} v(r + \delta r)(r + \delta r)d\theta = -\omega r^2\delta\theta + \omega(r + \delta r)^2\delta\theta = \omega\delta\theta(2r\delta r + \delta r^2) = \Omega S_{ABCD A}.$$

b) similarmenle $\Gamma_{ABCD A} = -\int_{\delta\theta}^0 v(r)rd\theta + \int_0^{\delta\theta} v(r + \delta r)(r + \delta r)d\theta = \Gamma/(2\pi)(-\delta\theta + \delta\theta) = 0 = \Omega S_{ABCD A}$ já que $\Omega = 0$.

5.2.2 Enunciado do teorema de Kelvin

O enunciado do teorema pode ser dado da seguinte maneira: “**Num fluido perfeito,**

$$\frac{d\Gamma_C}{dt} = 0 \quad (5.18)$$

onde C é uma curva constituída sempre das mesmas partículas, portanto acompanhando o movimento do fluido”. Em palavras: se seguirmos as partículas que formam o circuito C , a circulação Γ_C é sempre a mesma. Isto vale se o fluido for de densidade uniforme ($\rho = cste$) ou barométrico ($p = p(\rho)$, cf. §4.1.3).

Demostramos este teorema. Num dado instante t ,

$$\Gamma_C = \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{l}. \quad (5.19)$$

No instante $t + dt$, o caminho C se deslocou para uma nova posição, podendo se deformar.

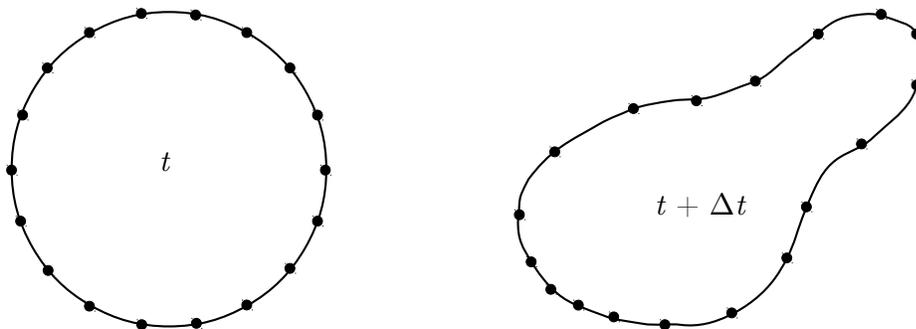


Figura 5.18: Caminho formado de partículas em t e $t + dt$.

Introduzemos uma parametrização s de C , de modo que $\vec{l} = \vec{l}(s, t)$ Temos

5.3. TEOREMA DAS LINHAS DE VÓRTICE DE HELMHOLTZ 129

$$\frac{d\Gamma_C}{dt} = \frac{d}{dt} \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{l} = \oint_L \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{l} + \oint_L \vec{v} \cdot \frac{d}{ds} \left(\frac{d\vec{l}}{dt} \right) ds \quad (5.20)$$

Usamos o fato que para fluido incompressível ou barométrico, $d\vec{v}/dt = -(1/\rho)\vec{\nabla}p - \vec{\nabla}gz \equiv -\vec{\nabla}f$. Em adição, como o circuito é formado de partículas de fluido, $d\vec{l}/dt = \vec{v}$. Temos

$$\frac{d\Gamma_C}{dt} = - \oint_L \vec{\nabla}f d\vec{l} + \oint_L \vec{\nabla}(v^2/2) d\vec{l} \quad (5.21)$$

Ambos termos a direita são nulos de modo que

$$\frac{d\Gamma_C}{dt} = 0. \quad (5.22)$$

5.3 Teorema das linhas de vórtice de Helmholtz

5.3.1 Definição da intensidade de um tubo de vórtice

Podemos relacionar a circulação com a vorticidade usando o teorema de Stokes¹.

Consideramos C_S formado por partículas de fluido. Temos

$$\Gamma = \oint_{C_S} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{\nabla} \times \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{\Omega} \cdot d\vec{S} \quad (5.23)$$

A quantidade $\int_S \vec{\Omega} \cdot d\vec{S}$ é chamada **intensidade do tubo de vórtice**, ela coincide com a circulação. Nos vimos isto explicitamente nos exemplos 5.5 e 5.6.

Pelo teorema de Kelvin, para fluido perfeito, vemos que a intensidade do tubo de vorticidade **não muda com o tempo**.

¹Isto não pode ser feito no caso do redemoinho quando a circulação é calculada em volta de um círculo C centrado em O pois a velocidade e seu rotacional não são definidos em $r=0$. Isto pode ser re-formulado assim: para o turbilhão, um círculo C centrado em O não é reduzível (o espaço não é simplesmente conectado) e o teorema de Stokes não se aplica para C .

5.3.2 Enunciado do teorema de Helmholtz

O teorema dá regras sobre o movimento de linhas de vórtice.

(i) A intensidade de um tubo de vórtice é constante ao longo do tubo. Isto implica que os tubos de vórtice são fechados ou acabam nas fronteiras do fluido.

(ii) Um tubo de vórtice (ou linha de vórtice) se movimenta com o fluido i.e. sempre é formado das mesmas partículas.

(iii) A intensidade de um tubo de vórtice se mantém constante durante o movimento. Em particular um movimento inicialmente irrotacional permanece irrotacional.

Para verificar o (i), basta observar que $\vec{\nabla} \cdot \vec{\Omega} = 0$ pois é a divergência de um rotacional. Assim como vimos nas seções 2.2.2 e 4.1.1, considerando para S um pedaço de tubo de vórtice limitado pelas tampas A_1 e A_2 , temos: $\int_{A_1} \vec{\Omega} \vec{dS} = \int_{A_2} \vec{\Omega} \vec{dS}$ (que se reduz a $A_1 \Omega_1 = A_2 \Omega_2$ para tampas transversais pequenas). Tubos de vórtice tem que ser fechados como num anel de fumaça ou ar, ou acabar nas fronteiras do fluido como num tornado.

A demonstração do (ii) usa o teorema de Kelvin. Consideremos um pedaço de tubo de vórtice e um circuito sobre o corpo do tubo. A circulação ao redor deste circuito é nula ($\vec{\Omega} \perp \vec{dS}$). A medida que o fluido se movimenta, a circulação sobre este circuito ligado às partículas do fluido permanece nula i.e. não há fluxo de vorticidade através da superfície delimitada pelo circuito. Isto vale para qualquer circuito da parede assim não há fluxo de vorticidade para fora ou dentro das paredes do tubo. Um raciocínio similar pode ser feito para um circuito sobre a tampa do tubo: a circulação sobre este circuito ligado às partículas do fluido permanece com o mesmo valor. O fluido que forma o tubo de vórtice (ou linha de vórtice, que é o limite de um tubo muito pequeno) continua dentro conforme o tempo passa. Se colorimos as partículas de fluido formando um tubo de vorticidade, quando o fluido se desloca, estas partículas com cor indicarão a nova posição do tubo. Quando observamos o deslocamento de um anel de fumaça ou ar, testemunhamos isto (cf. exercício 10).

O (iii) já foi visto na §5.3.1.

5.3.3 Ligação com a conservação de momento angular

Nas demonstrações acima, não fizemos menção explícita da conservação de momento angular. Ela vem embutida na equação de Euler, válida somente

5.3. TEOREMA DAS LINHAS DE VÓRTICE DE HELMHOLTZ 131

para os fluidos perfeitos, e onde não existe força tangencial. Nesta seção mostramos como usa-la explicitamente num caso particular (fluido perfeito de densidade uniforme com rotação de corpo rígido) para obter a parte (iii) do teorema de Helmholtz.

Consideremos, num instante t , um pequeno cilindro de fluido de volume como mostrado na figura 5.19 a esquerda.

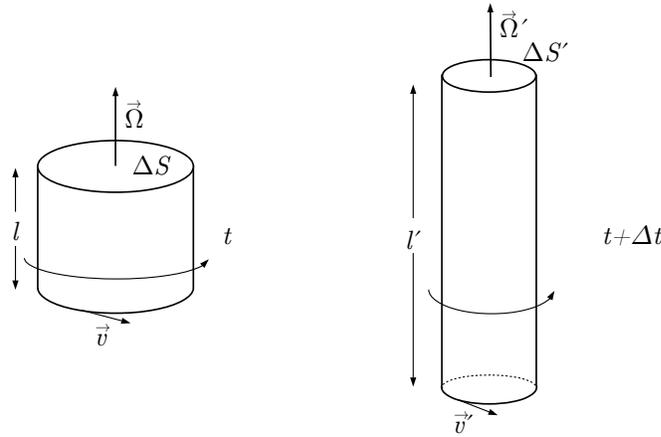


Figura 5.19: No escoamento rotacional, um elemento do fluido incompressível gira com centro num ponto, conservando seu momento angular em relação a este ponto enquanto ele é transportado.

Tomemos a base ΔS perpendicular a $\vec{\Omega}$. Devido ao escoamento, este cilindro vai-se encontrar, no instante $t + \Delta t$, num outro ponto (figura lado direito) e, em geral, deformado porém conservando o volume pois $\rho = \text{const.}$ e a conservação da massa implica em $l\Delta S = l'\Delta S'$.

Como o fluido é perfeito, não há nenhuma força tangencial agindo sobre a superfície do volume, nem torque externo, portanto o seu momento angular deve permanecer constante ($\sum \vec{\tau}_{ext} = d\vec{M}/dt$). Calculemos então o momento angular no instante t e depois em $t + \Delta t$ e igualemos entre si (supondo rotação de corpo rígido para fixar as ideias)

$$M = \left| \int \vec{r} \times \rho \vec{v} dV \right| = \rho l \int_0^R r(\omega r) 2\pi r dr = 2\pi\omega\rho l \frac{R^4}{4} = \omega\rho l R^2 \frac{\Delta S}{2} \quad (5.24)$$

no instante t . No instante $t + \Delta t$, temos analogamente

$$M' = \omega' \rho l' R'^2 \frac{\Delta S'}{2}. \quad (5.25)$$

Portanto, igualando $M = M'$ e, lembrando que $l\Delta S = l'\Delta S'$, segue

$$\Omega\Delta S = \Omega'\Delta S', \quad (5.26)$$

isto é, o movimento é tal que o produto da vorticidade e a área da seção reta de um tubo de vórtice, a intensidade, permanece constante.

Em adição, vemos que se o tubo fica mais alongado, ele tem que ser mais estreito (para conservar a massa) e girar mais rápido (para satisfazer a eq. 5.26).

Exemplo (5.7)

Supor um fluido perfeito incompressível com vorticidade $\vec{\Omega} = \Omega \hat{z}$. Usando a equação (5.15) mostrar diretamente que o alongamento do tubo de vórtice leva a um aumento da vorticidade.

Solução:

Na direção z , a eq. (5.15) leva a

$$\frac{d\Omega}{dt} = \Omega \frac{\partial v_z}{\partial z}. \quad (5.27)$$

Se alongarmos na direção z um pedaço de tubo de vórtice, $\partial v_z / \partial z > 0$, de modo que $d\Omega/dt > 0$.

Este resultado pode ser generalizado facilmente para anéis cf. §5.3 da ref. [2].

Para rever alguns dos assuntos deste capítulo (e alguns novos) de maneira intuitiva e lúdica, recomendo a leitura de [3]. Para quem quiser se aprofundar mais no assunto dos fluidos com vorticidade (em particular fluidos quânticos), sugiro a leitura do livro de Kambe [4]. O assunto dos tornados gera muita discussão, não sempre correta. Para quem tiver interesse, sugiro a leitura [5] (ou [6] que é mais avançado).

5.4 Exercícios

1. Revisão sobre coordenadas cilíndricas

Para calcular o gradiente, divergência e rotacional em coordenadas cilíndricas, pode-se transformar $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$, \hat{x} , \hat{y} , \hat{z} em coordenadas cilíndricas. Um método alternativo mais rápido é usar o operador

$$\vec{\nabla} = \hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\phi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}$$

No cálculo das derivadas, precisa-se levar em conta:

$\partial \hat{\rho} / \partial \phi = \hat{\phi}$ e $\partial \hat{\phi} / \partial \phi = -\hat{\rho}$. a) Calcular $\vec{\nabla} f$.

b) Calcular $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$.

c) Calcular $\vec{\nabla} \times \vec{A}$.

d) Verificar que se pode escrever $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ como $\frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho \hat{\phi} & \hat{z} \\ \partial/\partial \rho & \partial/\partial \phi & \partial/\partial z \\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z \end{vmatrix}$.

2.

Um escoamento tem velocidade dada em coordenadas polares por $\vec{v} = f(r, t) \hat{\phi}$.

a) Calcular $1/2 \vec{\nabla} v^2$ e $(\vec{\nabla} \times \vec{v}) \times \vec{v}$.

b) Calcular a aceleração e interpretar os dois termos $\partial \vec{v} / \partial t$ e $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$.

3. Revisão sobre coordenadas esféricas

Repetir o 1, usando $\vec{\nabla} = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\phi} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{\theta} \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \theta}$. No c), usar

$$\frac{1}{r^2 \sin \phi} \begin{vmatrix} \hat{r} & r \hat{\phi} & r \sin \phi \hat{\theta} \\ \partial/\partial r & \partial/\partial \phi & \partial/\partial \theta \\ A_r & r A_\phi & r \sin \phi A_\theta \end{vmatrix}$$

4.

Determine as linhas de corrente e de vorticidade dos seguintes escoamentos:

a) $\vec{v} = (-Cy, Cx, 0)$ e

b) $\vec{v} = (-Cy/r^2, Cx/r^2, 0)$, $r^2 = x^2 + y^2$,

onde C é uma constante. Calcule $|\vec{v}|$ e comentar sobre o que representa a constante C nos dois casos.

5.

Considere um campo de velocidade $\vec{v} = (ky, 0, 0)$ com k constante.

a) Calcule a circulação ao redor de um círculo de raio R como uma integral de linha.

b) Mesma pergunta mas usando uma integral de superfície.

6.

Considere um fluido incompressível.

- a) Para o escoamento de tipo redemoinho (velocidade $\propto 1/r$), num plano horizontal, escreva uma equação para dp/dr . Obtenha p como função de r a partir desta equação (supondo o fluido incompressível). Este resultado obtido era esperado?
- b) Repete o cálculo para a rotação de corpo rígido (velocidade $\propto r$).

7.

Derive uma equação do tipo de 5.13 no caso compressível homentrópico.

8.

Considere um circuito C de partículas de um fluido perfeito, dado pela expressão seguinte em $t=0$

$$\vec{l} = (A \cos s, A \sin s, 0), \quad 0 \leq s < 2\pi.$$

Cada valor de s corresponde à uma partícula de C . Posteriormente $C(t)$ é dado por

$$\vec{l} = (A \cos s + A \alpha t \sin s, A \sin s, 0), \quad 0 \leq s < 2\pi.$$

Calcular a velocidade $\vec{v}(s, t)$ das partículas. Calcular a circulação $\Gamma_{C(t)}$. Nesta expressão, verifique que o integrando depende de t mas a integral não depende de t . Isto lhe surpreende?

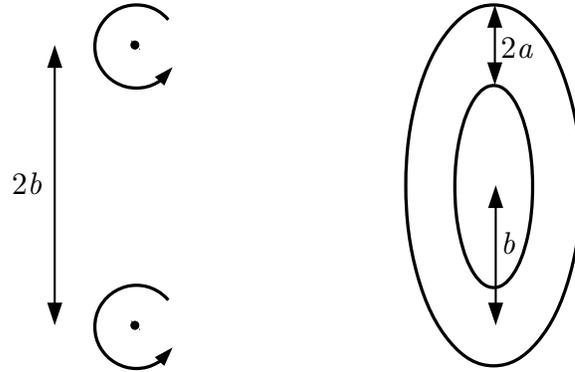
9.

Um tornado pode ser modelizado por um escoamento de velocidade $\vec{V}(t, r, z) = u(t, r, z)\hat{r} + v(t, r, z)\hat{\phi} + w(t, r, z)\hat{z}$ com vorticidade $\vec{\nabla} \times \vec{V} = \Omega(t, r, z)\hat{z}$.

- a) Mostrar que v e Ω só dependem de r e t e que $\partial u / \partial z = \partial w / \partial r$.
- b) Use a equação da vorticidade para mostrar que u só depende de r e t e w só depende de z e t .
- c) Para um fluido incompressível, mostrar que $\partial u / \partial r = -\partial w / \partial z$ e calcular u e w com os vínculos: $u(r=0) = 0$, $w(z=0) = 0$ e $w(z=H) = W$.
- d) No caso estacionário, calcular $v(r)$ e $\Omega(r)$. A solução obtida para v e Ω é razoável para todos os valores de r ?

10.

Na experiência onde fumaça escapa de um recipiente com abertura circular, observa-se que os anéis de fumaça se deslocam e mantem sua forma por algum tempo antes de se deformar e parar. O objetivo do exercício é de entender isto qualitativamente.



a) Um anel de fumaça consiste de um tubo de vorticidade estreito envolto por um escoamento irrotacional e fechado sobre si mesmo. Assim para entender seu movimento, consideremos um conjunto de dois redemoinhos afastados de uma distância $2b$ e com velocidades de rotação opostas $\vec{v}(r) = \pm\Gamma/(2\pi r)\hat{\theta}$. Mostrar que eles se deslocam como um conjunto com velocidade $U = \Gamma/(4\pi b)$.

Para um tubo de vórtices de seção reta circular de raio a , pode-se mostrar (§3.4.3.4 de [6], §7.6.2 de [4]) que

$$U = \frac{\Gamma}{4\pi b} \left(\ln \frac{8b}{a} - \frac{1}{4} \right)$$

b) Tratando a fumaça num anel como um fluido incompressível, explique porquê que os anéis inicialmente se deslocam mantendo sua forma.

c) Devido á viscosidade a equação de movimento para vorticidade da §5.1.4 se torna $\partial\vec{\Omega}/\partial t + \vec{\nabla} \times (\vec{\Omega} \times \vec{v}) = (\eta/\rho)\nabla^2\vec{\Omega}$, onde η é viscosidade de cisalhamento (cf. Cap. VIII) e $\nu \equiv \eta/\rho$. No caso de um redemoinho e fluido incompressível, isto se reduz² à equação de difusão: $\partial\Omega/\partial t = \nu(1/r)\partial(r\partial\Omega/\partial r)/\partial r$. Verique que $\vec{\Omega} = \Omega\hat{z} = \Gamma/(4\pi\nu t)\exp(-r^2/(4\nu t))\hat{z}$ é solução e calcule a velocidade correspondente. O que deve acontecer com o anel conforme o tempo passa?

11.

Pode-se fazer uma analogia com o magnetismo para fluido incompressível com vorticidade. Ela é resumida na tabela abaixo³.

²O laplaciano de um vetor sera discutido no Cap. VIII.

³Para uma demonstração sobre a lei de Biot-Savart para fluido e detalhes sobre as condições de aplicabilidade ver §7.1.2 em [4].

Magnetismo	Mec. Flu. (fluido incompressível)
$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ Conhecendo \vec{j} , podemos obter \vec{B} ?	$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ $\vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{\Omega}$ Conhecendo $\vec{\Omega}$, podemos obter \vec{v} ?
Ampère: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$ ($c/I = \int \vec{j} \cdot d\vec{S}$)	Ampère: $\oint \vec{v} \cdot d\vec{l} = \Gamma$ ($c/\Gamma = \int \vec{\Omega} \cdot d\vec{S}$)
Biot-Savart: $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$ $\vec{B} = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times \hat{r}}{r^2} dV$	Biot-Savart: $d\vec{v} = \frac{1}{4\pi} \Gamma \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$ $\vec{v} = \int \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{\Omega}(\vec{r}') \times \hat{r}}{r^2} dV$

- a) Um vórtice linear (não confundir com linha de vorticidade⁴) é um tubo de vorticidade Ω contraído até ficar uma linha mantendo sua intensidade, i.e. circulação Γ . Calcular a velocidade produzida por um vórtice linear de circulação Γ ao longo do eixo z de duas maneiras.
- b) Calcular a velocidade a uma distância z de um vórtice circular i.e. vórtice linear de circulação Γ dobrado num círculo de raio a .

⁴Se você pensa que é complicado, em inglês è pior: “line vortex” e “vortex line” respectivamente.

5.5 Referências

- [1] K. Matern et al. “Ring bubbles of dolphins”, *Scientific American* august (1996) 82.
- [2] D.J. Acheson “Elementary Fluid Mechanics”, Oxford University Press, 1990.
- [3] E. Huggins “Smoke Ring Physics” *Physics Teacher* 49 (2011) 488.
- [4] T. Kambe “Elementary Fluid Mechanics”, World Scientific, 2007.
- [5] P. Markowski & Y. Richardson “What we know and don't know about tornado formation”, *Physics Today* 67 (2014) 26.
- [6] R. Rotunno “The Fluid Dynamics of Tornadoes”, *Annual Review of Fluid Mechanics* 45 (2013) 59.
- [7] A.R. Paterson “A first course in fluid dynamics”, Cambridge University Press (1983).
- [8] M. Rieutord “Fluid Dynamics”, Springer (2015).
- [9] D. J. Griffiths “Introduction to Electrodynamics”, Prentice-Hall (1999) (3a ed.)

5.6 Dicas e respostas

1. Se precisar, ver a §6 do capítulo 1 em [7]. Verifique suas respostas num formulário confiável.

2. a) $(1/2)\vec{\nabla}v^2 = f(\partial f/\partial r)\hat{r}$. $\vec{\nabla} \times \vec{v} = (1/r)[\partial(rf)/\partial r]\hat{z}$. $(\vec{\nabla} \times \vec{v}) \times \vec{v} = -[f(\partial f/\partial r) + f^2/r]\hat{r}$. b) $d\vec{v}/dt = (\partial\vec{v}/\partial t) + (1/2)\vec{\nabla}v^2 + (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \times \vec{v} = (\partial f/\partial t)\hat{\phi} - (f/r^2)\hat{r}$. O primeiro termo é a aceleração tangencial e o segundo a aceleração radial para o movimento circular. Como alternativa, poderíamos ter calculado diretamente $\vec{v} \cdot \vec{\nabla}$ e $(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}$.

3. É um pouco trabalhoso mas dá para proceder como no 1. Se precisar, ver as dicas para resolver o exercício 8 do capítulo 1 em [5]. Verifique suas respostas num formulário confiável.

4. a) Resolvemos $dx/v_x = dy/v_y \Leftrightarrow dx/y = dy/dx \Leftrightarrow x^2 + y^2 = cste$: as linhas de corrente são círculos. $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 2C\hat{z}$. As linhas de vorticidade são retas paralelas ao eixo Oz . $|\vec{v}| = Cr$, i.e. o movimento é uma rotação de corpo rígido com velocidade angular C .

b) Resolvemos $dx/v_x = dy/v_y \Leftrightarrow -dx/y = dy/x \Leftrightarrow x^2 + y^2 = cste$: as linhas de corrente são círculos. $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$. Não há linhas de vorticidade. $|\vec{v}| = C/r$, i.e. o movimento é uma rotação de tipo redemoinho. C é relacionado com a circulação $\Gamma_{circ} = \oint_{circ} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \oint (C/r)r d\phi = C2\pi$.

5.

a) $\Gamma_{circ} = \oint_{circ} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} ky\hat{x} \cdot R d\phi\hat{\phi} = -kR^2 \int_0^{2\pi} \sin^2\phi d\phi = -kR^2\pi$ onde usamos $y = R\sin\phi$ e $\hat{x} = \cos\phi\hat{r} - \sin\phi\hat{\phi}$.

b) $\int_{disco} \vec{\nabla} \times \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_0^R \int_0^{2\pi} (-k\hat{z})(r dr d\phi\hat{z}) = -kR^2\pi = \Gamma_{circ}$ como esperado.

6

a) Temos $\vec{v} = \Gamma/(2\pi r)\hat{\phi}$. Este escoamento é estacionário e de rotacional nulo, o fluido é incompressível, de modo que a equação de Euler se reduz a: $d\vec{v}/dt = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = (1/2)\vec{\nabla}v^2 = -\vec{\nabla}(p/\rho) \Leftrightarrow d(p/\rho + v^2/2)/dr = 0 \Leftrightarrow p/\rho + v^2/2 = cste$, i.e. obtemos um equação do tipo “Bernoulli no espaço todo” como esperado. Integrando e usando $v(r = \infty) = 0$, obtemos $p(r) = -\rho\Gamma^2/(8\pi^2r^2 + p(\infty))$.

b) Temos $\vec{v} = \omega r\hat{\phi}$. Este escoamento é estacionário e de rotacional NÃO nulo, o fluido é incompressível. Temos $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = r\omega(1/r)\partial(r\omega\hat{\phi})/\partial\phi = -r\omega^2\hat{r}$. A equação de Euler se reduz a: $dp/dr = r\omega^2\rho$. Obtemos $p(r) = (1/2)r^2\omega^2\rho + p(0)$. Não é do tipo “Bernoulli no espaço todo”, o que não precisa ser o caso já que o escoamento não é irrotacional.

7 A derivação é bastante similar à da §5.1.4. Com $dw = dp/\rho$ para escoamento homentrópico, a equação de Euler pode ser re-escrita $\partial\vec{v}/\partial t + (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \times \vec{v} = -\vec{\nabla}(v^2/2 + w + gz)$. Aplicando $\vec{\nabla} \times$ a ambos lados, temos $\partial\vec{\Omega}/\partial t + \vec{\nabla} \times (\vec{\Omega} \times \vec{v}) = 0$. O segundo termo pode ser re-escrito e obtemos $d\vec{\Omega}/dt = -(\vec{\nabla} \cdot \vec{v})\vec{\Omega} + (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$. Usando a equação de continuidade para ρ vem $d(\vec{\Omega}/\rho)/dt = (1/\rho)(\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$.

8 $\vec{v} = (\partial\vec{l}/\partial t)|_s = (A\alpha \sin s, 0, 0)$. $\Gamma_{C(t)} = \oint \vec{v} \cdot d\vec{l} = \oint \vec{v} \cdot (\partial\vec{l}/\partial s)|_t ds = \int_0^{2\pi} (A\alpha \sin s\hat{x})(-A \sin s + A\alpha \cos s)\hat{x} ds = -\alpha A^2 \pi$. A circulação não pode depender de t para um circuito formado sempre pelas mesmas partículas. Observar que o circuito é um círculo que se deforma com o tempo.

9 a) $\vec{\Omega} = \vec{\nabla} \times \vec{V} = (-\partial v/\partial z)\hat{r} + (\partial u/\partial z - \partial w/\partial r)\hat{\phi} + (1/r)[\partial(rv)/\partial r]$ só tem componente na direção z de modo que $v(t, r, z) = v(t, r)$, $\partial u/\partial z = \partial w/\partial r$, $\Omega(t, r, z) = (1/r)[\partial(rv)/\partial r] = \Omega(t, r)$.

b) $(\partial\vec{\Omega}/\partial t) + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{\Omega} = (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla})\vec{V}$. Isto implica $(\partial\Omega/\partial t)\hat{z} + (u\partial/\partial r)(\Omega(t, r)\hat{z}) = (\Omega\partial/\partial z)(u\hat{r} + v\hat{\phi} + w\hat{z})$ de modo que $(\partial\Omega/\partial t + (u\partial/\partial r)(\Omega(t, r) = \Omega(\partial w/\partial z)$, $u(t, r, z) = u(t, r)$, $w(t, r, z) = w(t, z)$ (usamos $\partial u/\partial z = \partial w/\partial r$).

c) $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \Rightarrow (1/r)(\partial ru/\partial r) = -(\partial w/\partial z) = K$. Obtemos $u = (-W/2H)r$ e $w = (W/H)z$.

d) Usando o b), temos $u\partial\Omega/\partial r = \Omega\partial w/\partial z$. Usando o c), obtemos $\Omega = C/r^2$. Usando o a), temos $\Omega = (1/r)[\partial(rv)/\partial r]$ e obtemos $v = C \ln r/r + k/r$. Ambos Ω e v divergem para $r \rightarrow 0$.

10 a) Um dado redemoinho induz um escoamento de velocidade $\Gamma/(4\pi b)$ na posição (temporária do outro). Como resultado o conjunto se desloca com velocidade $\Gamma/(4\pi b)$ para a direita.

b) Isto é resultado do teorema de Helmholtz: se colorirmos as partículas de fluido sobre um tubo de vorticidade (o que a fumaça faz), elas se deslocam com o fluido marcando a nova posição do tubo e a intensidade do tubo de vorticidade $\Omega \Delta S$ se mantém constante no movimento.

c) $\partial\Omega/\partial t = -\Omega/t + r^2/(4\nu t^2)\Omega = \nu(1/r)\partial(r\partial\Omega/\partial r)/\partial r$. $\vec{\nabla} \times \vec{v} = \Omega\hat{z} \Leftrightarrow \partial(rv)/\partial r = \Omega r$. Integrando e usando $v(r, t=0) = \Gamma/(2\pi r)$ temos $v = \Gamma/(2\pi r)[1 - \exp(-r^2/(4\nu t))]$. Para r grandes, precisamente $r \gg \sqrt{4\nu t}$, a velocidade e vorticidade não são afetadas. Para r pequenos, $r \ll \sqrt{4\nu t}$, a velocidade é linear em r i.e. um movimento de corpo rígido: $v = \Gamma/(8\pi\nu t)]r$, o movimento não é mais irrotacional mas $\Omega \rightarrow 0$ para $t \rightarrow \infty$. Similarmente para o anel de fumaça, a vorticidade difusa para fora da região $r \sim 0$.

11 a) A derivação se faz como para calcular o campo magnético de um fio reto infinito de corrente I ao longo de Oz usando a lei de Ampère como no

exemplo 5.7 de [9]. Substituindo $\mu_0 I$ por Γ , obtem-se $\vec{v} = \Gamma/(2\pi r)\hat{\phi}$. Pode-se ver que o vortice linear é um redemoinho estendido em 3 dimensões. A derivação pode ser feita também com a lei de Biot-Savart como no exemplo 5.5 de [7].

b) A derivação pode ser feita também com a lei de Biot-Savart como no exemplo 5.6 de [7]. Obtem-se $\vec{v} = (\Gamma/2)a^2/(a^2 + z^2)^{3/2}\hat{z}$.