Lista de Exercícios XV

① Uma partícula de massa m e carga q é acelerada durante um intervalo finito de tempo por um campo elétrico uniforme até atingir uma velocidade não necessariamente pequena com relação à c.

(a) Qual o momento da partícula no instante final da aceleração?

(b) Qual a velocidade da partícula nesse instante?

② Considere uma onda eletromagnética se propagando na direção $\vec{k}$. De acordo com o electromagnetismo clássico, $\vec{k}\cdot\vec{E} = \vec{k}\cdot\vec{B} = 0$. Mostre que tal expressão é invariante de Lorentz estabelecendo a sua equivalência com a seguinte expressão: $\eta^{\mu}F_{\mu\nu} = 0$ (manifestamente invariante de Lorentz), em que η^{μ} é um 4-vetor orientado na direção de propagação da onda e $F_{\mu\nu}$ é o tensor de campo eletromagnético.

③ Um cabo condutor de comprimento infinito e raio r transporta uma corrente i e tem densidade de carga nula visto por um observador em repouso S, isto é, em S o cabo consiste em cargas positivas fixas e um fluxo de elétrons de densidade uniforme se movendo com velocidade (relativística) u. Um segundo observador S' viaja com direção paralela ao cabo com velocidade (também relativística) v. Como mede o observador S':

(a) O campo eletromagnético ?

(b) A densidade de carga no cabo ?

(c) As velocidades do fluxo de elétrons e das cargas positivas no condutor ?

(d) Como explicaria a presença de densidade de carga vista por S' se a densidade de carga vista por S é nula ?

④ Considere uma situação parecida a do problema anterior. Um cabo infinito e muito fino que transporta corrente i e tem densidade de carga nula no referencial das cargas fixas positivas, além disso, considere uma partícula de carga q posicionada a uma distância l do cabo e viajando em direção paralela ao cabo com a mesma velocidade (relativística) u dos elétrons no cabo.

(a) Calcule a densidade linear de carga no referencial S' da partícula de carga q.

(b) Calcule as forças elétrica F_E e magnética F_B sentidas pela carga q no referencial S das cargas fixas positivas.

(c) Repita o cálculo anterior no referencial S'.

(d) Considerando que a distância l é a mesma nos dois referenciais, aplique a transformação de forças: $F = F'/\gamma$ e compare os resultados de (c) e (b).

⑤ Usando o símbolo de Levi-Civita, mostre as seguintes identidades:

(a) $\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} + (\nabla \cdot \vec{B})\vec{A} - (\nabla \cdot \vec{A})\vec{B} - (\vec{A} \times \nabla)\vec{B}$,

(b) $\nabla \times (\nabla \times A) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$

(c) $\vec{A} \times (\nabla \times \vec{A}) = \frac{1}{2}\nabla A^2 - (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{A}$

(d) $\epsilon_{i_1 \ldots i_n}\epsilon^{i_1 \ldots i_n} = n!$

⑥ Uma onda eletromagnética plana de frequência ω viaja na direção x (no vácuo). A onda está polarizada na direção y, e a amplitude da componente elétrica é E_0.

(a) Escreva os campos elétrico e magnético, $\vec{E}(x, y, z, t)$ e $\vec{B}(x, y, z, t)$.

(b) A mesma onda é observada desde um referencial inercial S' que viaja com velocidade v relativa ao referencial original S. Encontre os campos elétricos e magnéticos em S' e expresse-os em termos das coordenadas de S': $\vec{E}'(x', y', z', t')$ e $\vec{B}'(x', y', z', t')$.

(c) Quais são a frequência ω' e o comprimento de onda λ' da onda em S'? Interprete este resultado. Determine a velocidade da onda em S', é o resultado que você esperava ?

⑦ Um par pósitron-elétron pode ser produzido na interação de um fóton com um elétron, via $\gamma + e^- \rightarrow e^- + e^+ + e^-$. Determine a energia mínima do fóton incidente para produzir a reação.

⑧ Duas partículas se movimentam na direção do eixo x em sentidos opostos com a mesma velocidade $\frac{\sqrt{3}}{2}c$, medidas no referencial S. Essas duas partículas colidem produzindo uma partícula só depois da colisão. A massa em repouso de cada uma das partículas iniciais é m_0. Calcule no referencial S:

(a) O 4-momento de cada uma das partículas antes da colisão.

(b) O 4-momento de cada uma das partículas depois da colisão.

(c) A massa da partícula depois da colisão.

⑨ Considere que $\partial_\gamma F_{\alpha\beta} \equiv \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}$, onde $F_{\alpha\beta}$ é o tensor de campo eletromagnético, provar que

$$\partial_\gamma F_{\alpha\beta} + \partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} = 0, \tag{1}$$

é equivalente às equações de Maxwell homogéneas.

⑩ Dois nêutrons, A e B se aproximam mutuamente ao longo de uma linha reta que os une. Cada um tem uma velocidade constante βc medida no laboratório. Demonstre que a energia total do nêutron B observada por alguém no referencial fixo ao nêutron A, é

$$\left(1+\beta^2\right)\left(1-\beta^2\right)^{-1} M_0 c^2, \tag{2}$$

onde M_0 é a massa do nêutron em repouso.

❶ Considere um processo onde a partícula **a** decai em duas partículas distintas, chamadas $\mathbf{a_1}$ e $\mathbf{a_2}$. Simbolicamente, escrevemos o processo como:

$$\mathbf{a}(p) \to \mathbf{a_1}(p_1) + \mathbf{a_2}(p_2), \tag{3}$$

onde em parênteses, temos a notação para os 4-momento das partículas. A massa da partícula que decaiu é m, e as massas dos produtos são m_1 e m_2. Calcular:

(a) O módulo do 3-momento de $\mathbf{a_1}$ no referencial em repouso de **a**.

(b) Usando a relação energia-momento e o resultado do item anterior, obter as energias de $\mathbf{a_1}$ e $\mathbf{a_2}$ em termos de m, m_1 e m_2 no referencial de repouso de $\mathbf{a}$.

(c) No referencial onde $\mathbf{a}$ tem um 3-momento não nulo obter o módulo do 3-momento de $\mathbf{a_1}$ (seja θ o ângulo entre $\vec{p}$ e $\vec{p_1}$).