Lista de Exercícios XIV

① Qual é a velocidade duma partícula cuja energia cinética é n vezes sua energia de repouso?

② Dois chicletes com massa de repouso m se chocam frontalmente, ambos com velocidade de $12c/13$, e permanecem grudados ápos o choque. Qual é a massa M do chiclete composto resultante?

③ Um fóton de energia E_0 se choca com um elétron (com massa de repouso m), inicialmente em repouso, conforme a figura 1. Calcule a energia E do fóton emergente em função do ângulo de espalhamento θ. Use então $E = hc/\lambda$ para expressar λ em termos de λ_0 e θ.

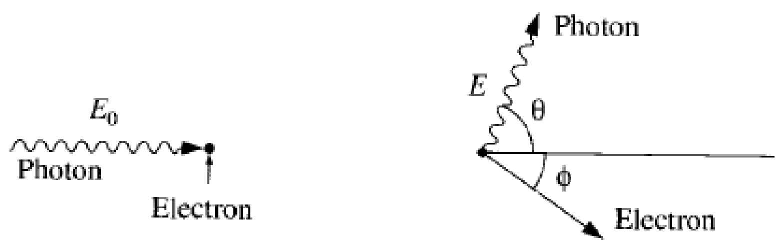

Figura 1

④ Um próton (massa m) em repouso é atingido por outro próton com o intuito de se produzir um anti-próton (de mesma massa m) pela reação $p + p \to p + p + p + \overline{p}$. Qual é a mínima energia do próton incidente para que tal reação possa ocorrer? (*dicas: (1) Calcule o 4-momento do sistema no referencial do laboratório e no referencial do centro de massa e use a invariância de $p^\mu p_\mu$. (2) Para a energia mínima, as partículas produzidas tem velocidade nula no referencial do centro de massa do sistema.*)

⑤ A relação $\vec{F} = d\vec{p}/dt$ contínua válida na mêcanica relativística, contanto que se use o momento relativístico. Mostre que a relação $\vec{F} = m\vec{a}$, no entanto, é substituida por:

$$\vec{F} = \frac{m}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\left[\vec{a} + \frac{\vec{u}\cdot\vec{a}}{c^2-u^2}\vec{u}\right],$$

onde $\vec{u} = d\vec{x}/dt$ e $\vec{a} = d\vec{u}/dt$, são a velocidade e aceleração ordinárias (não próprias) e m é a massa de repouso.

⑥ Use a relação deduzida no exercício anterior e a expressão da força de Lorentz

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$$

para mostrar que a aceleração de uma partícula de massa de repouso m e carga q, sob a ação de um campo eletromagnético, é:

$$\vec{a} = \frac{q}{m}\sqrt{1 - u^2/c^2}\left(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} - \frac{\vec{u} \cdot \vec{E}}{c^2}\vec{u}\right).$$

⑦ Usando $\vec{F} = d\vec{p}/dt = d(\gamma(u)m\vec{u})/dt$:

(a) mostre que a velocidade de uma partícula de massa m, inicialmente em repouso, sob a ação de uma força constante é

$$u(t) = \frac{Ft/m}{\sqrt{1 + (Ft/mc)^2}}.$$

e calcule u para $t \to \infty$.

(b) Integre $u(t)$ com a condição inicial $x(0) = 0$ para obter a trajetória hiperbólica:

$$x(t) = \frac{mc^2}{F}\left(\sqrt{1 + (Ft/mc)^2} - 1\right).$$

(c) [desafio] Faça um gráfico da trajetória e, observando seu limite assintótico para $t >> mc/F$, mostre que um fóton emitido em $x = 0$, mas num instante t_0, nunca alcançará a partícula se t_0 for maior que um certo valor t_{min}. Calcule t_{min}.

⑧ Usando as transformações para os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$:

(a) Mostre que $\vec{E} \cdot \vec{B}$ é invariante relativístico.

(b) Mostre que $E^2 - c^2B^2$ é invariante relativístico.

(c) Se num referencial $\vec{B} = 0$ mas $\vec{E} \neq 0$, existe algum referencial onde $\vec{E'} = 0$?

⑨ Um capacitor de placas planas paralelas está em repouso em $\mathcal{S}_0$, inclinado de 45° com relação ao eixo x_0 (figura 2), e suas placas têm densidade de carga $\pm\sigma$. O referencial $\mathcal{S}$ se move para a direita de $\mathcal{S}_0$ com velocidade v.

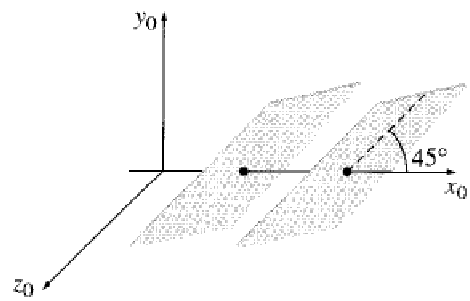

Figura 2

(a) Encontre o campo $\vec{E}_0$ em $\mathcal{S}_0$.

(b) Encontre o campo $\vec{E}$ em $\mathcal{S}$.

(c) Que ângulo a placa forma com o eixo x de $\mathcal{S}$.

(d) O campo é perpendicular à placa em $\mathcal{S}$? Senão, qual é o ângulo formado entre $\vec{E}$ e um vetor $\vec{n}$ normal à placa?

⑩ Calcule o raio do movimento circular realizado por uma partícula de massa m e carga q num campo magnético uniforme B perpendicular a sua velocidade $\vec{u}$.

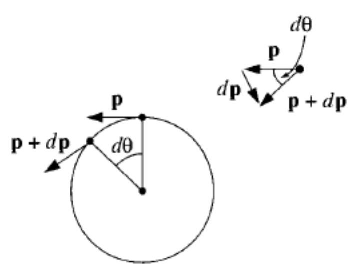

Figura 3

Note que a relação clássica $dp = mvd\theta$, que fornece a força centrípeta $F_c = mv^2/R$, tem de ser substituída por $dp = pd\theta$ (conforme a figura 3) onde p é o momento relativístico, resultando em:

$$F_c = \frac{dp}{dt} = p\frac{d\theta}{dt} = \frac{pu}{R}.$$

1 Considere as transformações de campos para $\mathcal{S}'$ se movendo com velocidade $\vec{v}$ (sem perda de generalidade assuma $\vec{v} = v\hat{x}$) com relação a $\mathcal{S}$. Mostre que:

(a) Se $\vec{B} = 0$, então $\vec{B}' = -\frac{1}{c^2}(\vec{v} \times \vec{E}')$.

(b) Se $\vec{E} = 0$, então $\vec{E}' = (\vec{v} \times \vec{B}')$.

2 Dadas as expressões

$$\vec{E}_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r_0}\hat{r_0}; \quad \text{e} \quad \vec{B}_0 = 0$$

para os campos de uma carga q em repouso na origem em $\mathcal{S}_0$, transforme para um sistema $\mathcal{S}$ se movendo para a esquerda com velocidade v_0 (figura 4) e obtenha as expressões:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(1 - v_0^2/c^2)q}{(1 - (v_0^2/c^2)\sin^2\theta)^{3/2}}\frac{\hat{R}}{R^2}; \quad \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{(1 - v_0^2/c^2)qv_0\sin\theta}{(1 - (v_0^2/c^2)\sin^2\theta)^{3/2}}\frac{\hat{\phi}}{R^2},$$

para os campos de uma carga em movimento uniforme com velocidade $\vec{v} = v_0\hat{x}$, onde $\vec{R}$ é o vetor ligando a carga à posição onde são medidos os campos e θ é o ângulo entre $\vec{R}$ e $\hat{x}$. *Dica: Note que $R_x = x - v_0t$ e use a relação pertinente obtida no exercício anterior.*

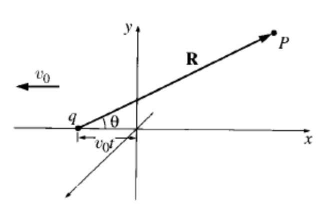

Figura 4