Lista de Exercícios XIII

① Para qualquer tensor $A_{\mu\nu}$ pode-se definir sua parte simétrica como $A_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}(A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu})$ e a parte antisimétrica $A_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}(A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu})$.

- (a) Mostrar que $A_{\mu\nu} = A_{(\mu\nu)} + A_{[\mu\nu]}$.
- (b) Considerando uma definição análoga para $B^{\mu\nu}$, mostrar que $A_{(\mu\nu)}B^{\mu\nu} = A_{(\mu\nu)}B^{(\mu\nu)} = A_{\mu\nu}B^{(\mu\nu)}$.
- (c) Mostrar que $A_{(\mu\nu)}B^{[\mu\nu]} = 0$.
- (d) Repetir (b) e (c) substituindo $(\mu\nu) \leftrightarrow [\mu\nu]$.

② Considere o tensor de permutações $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ em 4-dimensões (espaço de Minkowski). Começando com a componente $\epsilon_{0123} = 1$, as outras componentes podem ser encontradas da seguinte forma: componentes obtidas de permutações pares dos índices são iguais a 1 e as obtidas de permutações impares são iguais a -1. Finalmente, as componentes com índices repetidos são nulas. Exemplos: $\epsilon_{0312} = 1$, $\epsilon_{3012} = -1$ e $\epsilon_{0012} = 0$. Também considere a delta de Kronecker em 4-dimensões δ^{α}_{β} tal que suas componentes são 1 para $\alpha = \beta$ e 0 para $\alpha \neq \beta$. Verificar as seguentes identidades,

- (a) $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} = -2(\delta^{\alpha}_{\rho}\delta^{\beta}_{\sigma} - \delta^{\beta}_{\rho}\delta^{\alpha}_{\sigma})$.
- (b) $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\mu\nu\rho\beta} = -6\delta^{\beta}_{\sigma}$.

③ Considere um choque elástico no referencial S entre dois blocos com velocidades iniciais $\vec{v}_1 = (v_1, 0, 0)$ e $\vec{v}_2 = (v_2, 0, 0)$ e masas m_1 e m_2, com $v_1 > v_2$ e $m_1 \neq m_2$. Depois do choque as velocidades dos blocos 1 e 2 são $\vec{v}_3 = (v_3, 0, 0)$ e $\vec{v}_4 = (v_4, 0, 0)$ respectivamente. Ademais considere um referencial S' o qual desloca-se com velocidade $\vec{u} = (-u, 0, 0)$ com respeito a S, i.e S desloca-se com velocidade $\vec{u} = (u, 0, 0)$ com respeito a S'.

- (a) Utilizar a lei de adição de velocidades relativista para calcular as velocidades dos objetos antes e depois do choque no referencial S', i.e v'_1, v'_2, v'_3 e v'_4.

- (b) Mostrar que as equações de conservação de energia-momentum, considerando as definições de energia e momentum não-relativista $E = \vec{p}^2/2m$ e $\vec{p} = m\vec{v}$, não podem ser satisfeitas nos dois referenciais consistentemente.
- (c) Por outro lado, mostrar que utilizando a definição relativista da energia e momentum, $E = \gamma(v)mc^2$ e $\vec{p} = \gamma(v)m\vec{v}$, as equações de conservação de energia-momentum são validas nos dois referenciais.

No ponto (c) é sugerido mostrar e utilizar a identidade $\gamma_1\gamma_2(v_1 + v_2) = \gamma(v)v$ com v a velocidade obtida da lei de adição relativista.

④ Considere um fóton no referencial S com 4-momentum dado por $p^\mu = (h\nu, h\nu, 0, 0)$, com h a constante de Planck. Notar que as unidades de h são erg×sec. Tambem podemos definir o 4-momentum do mesmo fóton no referencial S', o qual desloca-se com velocidade $\vec{v} = (v, 0, 0)$ com respeito a S, da mesma forma $p'^\mu = (h\nu', h\nu', 0, 0)$.

- (a) Encontrar a relação entre ν' e ν utilizando a transformação de lorentz correspondente. Comparar com a fórmula do efeito Doppler e comentar.
- (b) Por outro lado, considere um 4-momentum em S dado por $p^\mu = (h\nu, h\nu\cos\alpha, h\nu\sin\alpha, 0)$ e uma expressão análoga para o 4-momentum no S'. Encontrar a relação entre ν' e ν, e entre α' e α utilizando a TL correspondente. Comparar com o efeito Doppler e com a fórmula para o efeito de aberraçao.

⑤ Uma fonte de luz desloca-se com velocidade $\vec{v_f} = (0, v, 0)$ com respeito a S, e um observador desloca-se com velocidade $\vec{v_o} = (v, 0, 0)$ tambem com respeito a S. A fonte, quando emite o sinal (fóton ou onda eletromagnética), esta afastada do origem a mesma distância que o observador esta quando ele receve o sinal. Calcular a relação entre a freqüência emitida ν_f e a freqüência observada ν_o. Pode utilizar as fórmulas do efeito Doppler usuales ou o procedimento do exercicio anterior.

⑥ Um espelho desloca-se na direção de sua normal com velocidade uniforme v no referencial S. Um raio de luz incide no espelho com freqüência

ν_1 com um ângulo de incidência θ, e é refletido com freqüência ν_2 com um ângulo de reflexão ϕ.

- (a) Provar que $\tan(\frac{1}{2}\theta)/\tan(\frac{1}{2}\phi) = (c+v)/(c-v)$.
- (b) Mostrar que $\nu_2/\nu_1 = \sin\theta/\cos\phi$.