Lista de Exercícios XII

① Considere o triângulo isósceles formado por três barras de comprimentos $l_a = l_b$ e l_c medidos em repouso no referencial S. Por simplicidade considere que a barra l_c seja paralela ao eixo x. Calcule a velocidade do referencial S' tal que naquele referencial o triângulo é observado como um triângulo equilátero.

② Considere um evento P no referencial S com coordenadas (ct, x, y, z), com c a velocidade da luz. Notar que a componente ct tem as mesmas unidades que (x, y, z).

- (a) Escrever a transformação de Lorentz (TL) que permite obter as coordenadas (ct', x', y', z') do mesmo evento P no referencial S', o qual tem uma velocidade relativa com respeito ao S dada por $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$. Escrever a transformação na forma matricial.
- (b) Mostrar que para $\vec{v} = 0$ a TL é representada pela matriz identidade de 4×4.
- (c) Utilizando a forma matricial da transformação, calcular a TL inversa entre os referencias S' e S do item (a).
- (d) Utilizando a forma matricial, mostrar que duas transformações sucessivas, desde S para S' com velocidade relativa $\vec{v}$ e desde S' para S'' com velocidade relativa $\vec{u}$, geram uma TL desde S para S'' com velocidade relativa $\vec{w}$. Encontrar $\vec{w}$ em termos de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e interpretar.

③ Note que podemos definir os vetores $w = (ct, x, y, z)$ e $w' = (ct', x', y', z')$ e a matriz $\Lambda(\vec{v})$ tal que a TL do ponto (a) do exercício anterior pode escrever-se da forma $w'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}(\vec{v})w^{\nu}$ com $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, onde os índices repetidos (um acima e outro embaixo) representam uma soma de 0 ate 3. Para $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ o primeiro índice (μ) é a linha e o segundo (ν) a coluna. Também podemos escrever a TL inversa como $w^{\mu} = (\Lambda^{-1}(\vec{v}))^{\mu}{}_{\nu}w'^{\nu}$. Daqui em frente vamos esquecer o argumento $\vec{v}$ na expressão da TL.

- (a) Mostrar que a definição da TL inversa é consistente, i.e. verificar que $(\Lambda^{-1})^{\mu}{}_{\nu}\Lambda^{\nu}{}_{\rho} = \delta^{\mu}{}_{\rho}$ com $\delta^{\mu}{}_{\rho}$ as componentes da matriz identidade de 4×4.

- (b) Utilizando a notação com índices, escrever a TL composta do ponto (d) do exercício anterior.

④ Considerando a notação de índices do exercício anterior, podemos notar que o conceito de vetor de Lorentz representado por suas componentes w^μ, pode ser estendido ao conceito de tensores de Lorentz, os quais podem ter n índices e podem ser escritos como $T^{\mu_1 \dots \mu_n}$. Tambem podemos considerar tensores com m índices embaixo da forma $M_{\nu_1 \dots \nu_m}$, e portanto objetos com ambos índices da forma $N^{\mu_1 \dots \mu_n}{}_{\nu_1 \dots \nu_m}$. Por definição, as regras de transformação (i.e. transformações de Lorentz) destes objetos são as seguintes:

$$\begin{aligned}
T'^{\mu_1 \dots \mu_n} &= \Lambda^{\mu_1}{}_{\nu_1} \dots \Lambda^{\mu_n}{}_{\nu_n} T^{\nu_1 \dots \nu_n} \\
M'_{\mu_1 \dots \mu_m} &= (\Lambda^{-1})^{\nu_1}{}_{\mu_1} \dots (\Lambda^{-1})^{\nu_m}{}_{\mu_m} M_{\nu_1 \dots \nu_m} \\
N'^{\mu_1 \dots \mu_n}{}_{\nu_1 \dots \nu_m} &= \Lambda^{\mu_1}{}_{\rho_1} \dots \Lambda^{\mu_n}{}_{\rho_n} (\Lambda^{-1})^{\sigma_1}{}_{\nu_1} \dots (\Lambda^{-1})^{\sigma_m}{}_{\nu_m} N^{\rho_1 \dots \rho_n}{}_{\sigma_1 \dots \sigma_m}
\end{aligned}$$

Os índices acima são chamados índices contravariantes e os de baixo como covariantes, portanto pode-se chamar o vetor A^μ como um vetor contravariante e o vetor B_μ como vetor covariante.

- (a) Calcular a lei de transformação dos seguintes objetos: $A_{\mu\nu} B^\nu$, $A_{\mu\nu} B^{\mu\nu\rho}$, $A_{\mu\nu\rho\sigma} B^{\mu\nu}$ e $A_{\mu\nu\rho\sigma} B^{\mu\nu} C^\rho$. Interprete os resultados considerando a forma da trasformação efetiva dos objetos. Por exemplo, é possível dizer que $A_{\mu\nu} B^\nu$ transforma como um tensor covariante de um índice só?

⑤ O tensor métrico $g_{\mu\nu}$ é usado para baixar índices, por exemplo podemos definir o vetor covariante $A_\mu \equiv g_{\mu\nu} A^\nu$. Utilizar as regras do exercício anterior para mostrar que A_μ de fato transforma como um vetor covariante. O inverso do tensor métrico e definido como $g^{\mu\nu}$, tal que $g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} = \delta^\mu_\nu$. Logo, mostrar que é consistente definir o vetor contravariante $A^\mu \equiv g^{\mu\nu} A_\nu$. Finalmente, mostrar que a contração $g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu$ é invariante baixo TL.

⑥ No sistema de coordenadas cartesiano o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ é dado por uma matriz diagonal com componentes $(1, -1, -1, -1)$.

- (a) Calcular as componentes do inverso do tensor métrico $g^{\mu\nu}$.
- (b) Mostar que o tensor métrico é numericamente invariante baixo uma TL geral.
- (c) Desafio: considerando que a definição do intervalo $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ é independente do sistema de coordenadas, calcular as componentes de $g_{\mu\nu}$ no sistema de coordenadas esférico (t, r, θ, ϕ).