Lista de Exercícios XI

① **[Função gama.]** Mostre que para a função

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

valem as identidades:

$$(i)\, \gamma v = c\sqrt{\gamma^2 - 1}; \quad (ii)\, c^2 d\gamma = \gamma^3 v dv; \quad (iii)\, d(\gamma v) = \gamma^3 dv$$

e faça um gráfico de $\gamma \times v$, para $-c \leq v \leq c$.

② **[Intervalo invariante.]**Considerando a invariância do intervalo

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$$

por transformações de Lorentz, mostre que:

(a) A ordem temporal entre dois eventos é a mesma em qualquer referencial inercial se e somente se os eventos podem, em algum referencial, ser ligados por um sinal que se propaga com velocidade menor ou igual a c. (*Note que isso é necessário e suficiente para garantir a não violação de causalidade.*)

(b) Se dois eventos ocorrem numa mesma posição em um determinado referencial $\mathcal{S}$ então a separação temporal entre eles, quando medida num referencial inercial arbitrário, pode assumir qualquer valor maior ou igual àquela medida em $\mathcal{S}$.

(c) Se dois eventos ocorrem simultaneamente em um determinado referencial $\mathcal{S}$ então a separação espacial entre eles, quando medida num referencial inercial arbitrário, pode assumir qualquer valor maior ou igual àquela medida em $\mathcal{S}$.

Para os exercícios ③, ④, ⑤, ⑥ e ⑨ abaixo, considere referenciais inerciais $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}'$ associados a coordenadas (t, x, y, z) e (t', x', y', z'), respectivamente, e satisfazendo:

(i) $\mathcal{S}'$ se move com velocidade constante v na direção x de $\mathcal{S}$.

(ii) As origens de S e S' coincidem em $t = t' = 0$.

(iii) Os planos $y = 0$ e $y' = 0$, assim como $z = 0$ e $z' = 0$, coincidem.

(iv) O plano $x' = 0$ por sua vez coincide com $x = vt$.

③ Em $\mathcal{S}'$ uma barra no plano $z' = 0$ e paralela ao eixo x' se move com velocidade u na direção y'. Mostre que em $\mathcal{S}$ a barra está inclinada com relação ao eixo x e calcule o ângulo de inclinação.

④ Uma barra em repouso em $\mathcal{S}$ no plano $z = 0$ tem inclinação m relativa ao eixo x (i.e. forma com o eixo x um ângulo α tal que $\tan\alpha = m$). Em $\mathcal{S}'$, qual é sua inclinação m' com relação o eixo x'?

⑤ [**Paradoxo da escada no celeiro.**] Com a intenção de guardar uma escada de 10m de comprimento num celeiro de apenas 5m (ambos medidos em repouso), um fazendeiro pede que sua filha venha correndo com a escada (referencial $\mathcal{S}'$), de tal forma que a escada contraída venha a caber no celeiro, e ele, que espera na porta (referencial $\mathcal{S}$), possa fechá-la rapidamente guardando a escada.

(a) Qual é a velocidade v que a filha tem que correr para que no referencial $\mathcal{S}$ a escada tenha o mesmo comprimento que o celeiro?

(b) Nesse caso, qual o comprimento do celeiro em $\mathcal{S}'$?

A escada cabe no celeiro? Para abordar essa questão, considere os eventos

(1) A parte da frente da escada passa pela porta do celeiro.

(2) A parte de trás da escada passa pela porta do celeiro.

(3) A frente da escada encontra a parede ao final do celeiro.

e sincronize as origens de $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}'$ no evento (1).

(c) Calcule os instantes t_2 e t_3 em que os eventos (2) e (3) acontecem em $\mathcal{S}$. Nesse referencial, a escada entrou completamente no celeiro?

(d) Calcule os instantes t'_2 e t'_3 em que os eventos (2) e (3) acontecem em $\mathcal{S}'$. Nesse referencial, a escada entrou completamente no celeiro?

(e) Observe agora que em $\mathcal{S}'$ a escada só pode parar completamente após um sinal, emitido no evento (3), percorrer todo seu comprimento e alcançar sua parte traseira num instante t'_4. Supondo que esse sinal seja o mais veloz possível, calcule t'_4 e explique como esse raciocínio resolve o paradoxo.

⑥ **[Rapidez.]** Defina a rapidez ϕ (de $\mathcal{S}'$ com relação a $\mathcal{S}$) por

$$\tanh\phi = \frac{v}{c}.$$

Lembre-se que $\cosh^2\eta - \sinh^2\eta = 1$ e que $\cosh\eta \pm \sinh\eta = e^{\pm\eta}$, para todo $\eta \in \mathbb{R}$.

(a) Mostre que:

$$(i)\ \cosh\phi = \gamma; \quad (ii)\ \sinh = \frac{v}{c}\gamma; \quad (iii)\ e^{\phi} = (\frac{c+v}{c-v})^{1/2}$$

(b) Mostre que as transformações

$$x' = \gamma(x - vt); \quad t' = \gamma(t - vx/c^2)$$

podem se escritas como

$$x' = x\cosh\phi - ct\sinh\phi.$$

Observe que, como $\cosh\eta = \cos i\eta$ *e* $i\sinh\eta = \sin i\eta$*, a transformação acima é, formalmente, uma "rotação"no plano* (x, ict) *de um ângulo* $i\phi$*, e como tal preserva* $x^2 + (ict)^2$*.*

(c) Derive as relações

$$ct' + x' = e^{-\phi}(ct + x); \quad ct' - x' = e^{\phi}(ct - x).$$

(d) Observe que as relações acima mostram que, em termos das coordenada $\xi = ct + x$ e $\zeta = ct - x$ (que corresponde a uma rotação de $\pi/4$ no plano (t, x)), uma transformação de Lorentz não altera a direção dos eixos coordenados, qual é então seu efeito? Escreva o intervalo invariante entre dois eventos A e B em termos de suas coordenadas (ξ_A, ζ_A) e (ξ_B, ζ_B) e diga sua interpretação geométrica num diagrama $\xi \times \zeta$.

(e) Se um terceiro referencial $\mathcal{S}''$ se move com velocidade constante u na direção x' de S', sua rapidez ψ relativa a $\mathcal{S}'$ é então definida por $\tanh\psi = u/c$. Usando as relações do item (c) mostre que sua rapidez relativa à $\mathcal{S}$ é $\phi + \psi$. *Ou seja, a rapidez é aditiva para movimentos colineares.*

(f) Quantos acréscimos consecutivos de $c/2$ em sua velocidade, no referencial de repouso instantâneo, uma partícula deve receber para atingir uma velocidade resultante de (i) $0,9c$;(ii) $0,99c$;(i) $0,999c$? (Dados: $\tanh 0,55 = 0,5$; $\tanh 1,47 = 0,9$ $\tanh 2,65 = 0,99$ e $\tanh 3,8 = 0,999$.)

(g) Com $\psi = \tanh^{-1}(u/c)$ e definindo $z = e^{2\psi}$, prove que n incrementos consecutivos de velocidade u no referencial de repouso instantâneo produzem uma velocidade $c(z^n - 1)/(z^n + 1)$. Calcule o limite $n \to \infty$.

⑦ **[Paradoxo dos gêmeos.]** Em seu 21° aniversário, a mulher de um casal de gêmeos embarca numa viagem espacial a estrela X a velocidade de $4c/5$ e seu irmão fica em casa (referencial $\mathcal{S}$). Chegando a estrela X ela imediatamente pula numa nave se movendo na direção contrária e retorna a terra, novamente a $4c/5$. Ela chega em seu aniversário de 39 anos (quando observado no seu relógio).

(a) Qual é a idade de seu irmão?

(b) Qual é a distância à estrela X? Chame de $\mathcal{S}'$ o referencial da nave de ida e de $\widehat{\mathcal{S}}$ o da nave de volta. Os três referenciais $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$ e $\widehat{\mathcal{S}}$ estão sincronizados com $x = x' = \hat{x} = 0$ e $t = t' = \hat{t} = 0$ no instante da partida.

(c) Quais são as coordenadas (t, x) do pulo em $\mathcal{S}$?

(d) Quais são as coordenadas (t', x') do pulo em $\mathcal{S}'$?

(e) Quais são as coordenadas $(\hat{t}, \hat{x'})$ do pulo em $\widehat{\mathcal{S}}$?

(f) Se a irmã quisesse que seu relógio coincidisse com o relógio em $\widehat{\mathcal{S}}$ como ela deveria ajustá-lo após o pulo? Se ela *fizesse* isso, qual *seria* a leitura de seu relógio ao voltar para casa? *Obviamente isso não altera sua idade real.*

(g) Qual é a reposta da irmã à pergunta, "Quantos anos tem seu irmão?"(i) imediatamente antes do pulo (ii) imediatamente após o pulo? (*Note que nada de abrupto acontece ao irmão entre (i) e (ii).*)

(h) Quantos anos dura a viajem de volta? Some esse resultado à (ii) de (g) para determinar quão velho *ela* espera encontrar seu irmão no reencontro. Compare com a resposta em (a).

⑧ [**Paradoxo de Ehrenfest.**] Considere um disco de raio R girando com velocidade angular ω. Sua circunferência é presumivelmente contraída enquanto seu raio, perpendicular a velocidade, é mantido inalterado. Qual é a razão circunferência raio? O que está ocorrendo?

⑨ [**Desafio.**] Um cilindro em $\mathcal{S}'$ gira em torno de seu eixo, que coincide com x', com velocidade angular ω. Mostre que em $\mathcal{S}$ ele é visto instantaneamente retorcido e calcule o número de voltas por unidade de comprimento.