Respostas da Lista de Exercícios III

1. (a) O período temporal $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, frequência $\dfrac{1}{T}$, período espacial cT e a fase da onda $kz - \omega t + \delta$.

(b) $\vec{B} = \dfrac{A}{c} cos(kz - \omega t + \delta)\hat{y}$

(c) A direção de propagação de onda é $\hat{z}$

2. (a)

$$\vec{S} = -\frac{Qr}{2\pi R^4 \epsilon_0}\left(\frac{dQ}{dt}\right)\hat{\phi}$$

(b) A energia eletrostática:

$$U_E = u_E V = \frac{Q^2 h}{2\pi R^2 \epsilon_0},$$

a sua variação com o tempo:

$$\frac{dU_E}{dt} = \frac{Qh}{\pi R^2 \epsilon_0}\left(\frac{dQ}{dt}\right).$$

Por outro lado:

$$\oint_\Sigma \vec{S} \cdot d\vec{\Sigma} = \frac{Qh}{\pi R^2 \epsilon_0}\left(\frac{dQ}{dt}\right).$$

3. (a)

$$\vec{E} = \vec{J}/\sigma = \frac{I}{\sigma \pi a^2}\hat{z}.$$

(b)

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\phi}$$

(c)

$$\vec{S} = -\frac{I^2}{2\sigma \pi^2 a^3}\hat{r}$$

(d)

$$\oint_\Sigma \vec{S} \cdot d\vec{\Sigma} = \frac{I^2 l}{\sigma \pi a^2},$$

em que a superficie de integração Σ é um cilindro de largura l e raio a. Note que $\sigma = 1/\rho = \frac{l}{\pi a^2 R}$, em que R é a resistencia do material. Portanto a anterior equação fica:

$$\oint_\Sigma \vec{S} \cdot d\vec{\Sigma} = \frac{I^2 l}{\frac{l}{\pi a^2 R}\pi a^2} = RI^2,$$

que é a taxa de dissipação de energia de uma resistencia.

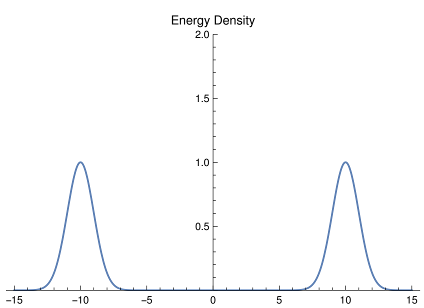
4. (a)

$$u(z,t) = \epsilon_0 \left(E_1^2 e^{\frac{-2(z-ct)^2}{b^2}} + E_2^2 e^{\frac{-2(z+ct)^2}{b^2}} \right),$$
$$\vec{S}(z,t) = \epsilon_0 \hat{z} \left(E_1^2 e^{\frac{-2(z-ct)^2}{b^2}} - E_2^2 e^{\frac{-2(z+ct)^2}{b^2}} \right)$$

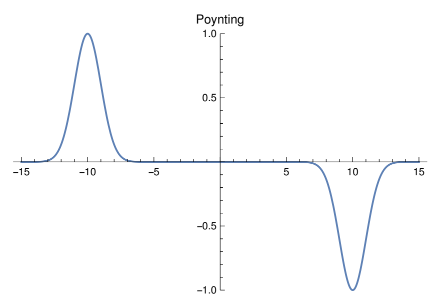
(b) Em $t = -T_0$ as expressões para $u(z,t)$ e $\vec{S}(z,t)$ ficam:

$$u(z,t) = \epsilon_0 \left(E_1^2 e^{\frac{-2(z+cT_0)^2}{b^2}} + E_2^2 e^{\frac{-2(z-cT_0)^2}{b^2}} \right),$$
$$\vec{S}(z,t) = \epsilon_0 \hat{z} \left(E_1^2 e^{\frac{-2(z+cT_0)^2}{b^2}} - E_2^2 e^{\frac{-2(z-cT_0)^2}{b^2}} \right),$$

para ver que tanto u como $\vec{S}$ se concentram em duas regiões distintas do espaço basta desenha-las ($E_1 = E_2$), i.e.,



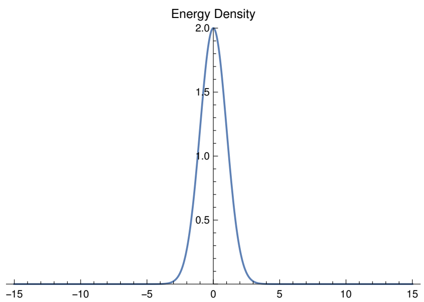
(a) Densidade de Energia



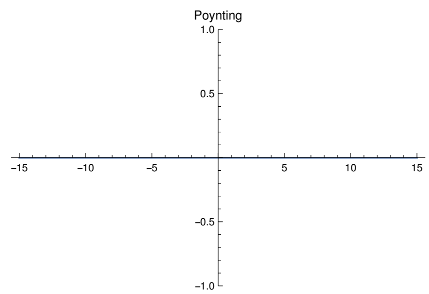
(b) Vetor de Poynting

(c) Em $t = 0$ ($E_1 = E_2$):

$$u(z,t) = 2\epsilon_0 E_1^2 e^{\frac{-2z^2}{b^2}},$$
$$\vec{S}(z,t) = 0,$$



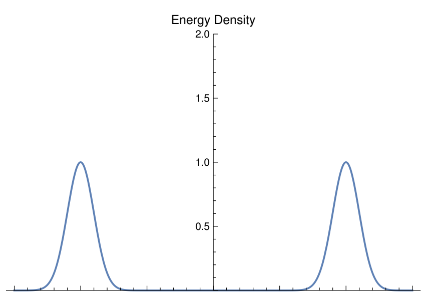
(a) Densidade de Energia



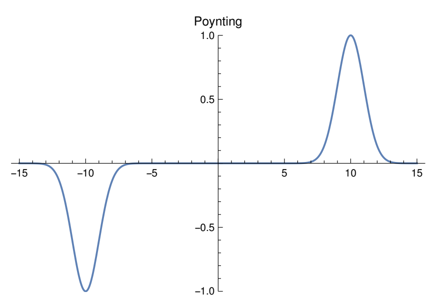
(b) Vetor de Poynting

(d) Em $t = 0$ ($E_1 = E_2$):

$$u(z,t) = \epsilon_0 \left(E_1^2 e^{\frac{-2(z-cT_0)^2}{b^2}} + E_2^2 e^{\frac{-2(z+cT_0)^2}{b^2}} \right),$$
$$\vec{S}(z,t) = \epsilon_0 \hat{z} \left(E_1^2 e^{\frac{-2(z-cT_0)^2}{b^2}} - E_2^2 e^{\frac{-2(z+cT_0)^2}{b^2}} \right),$$



(a) Densidade de Energia



(b) Vetor de Poynting

5. (a) $\sigma E_0 cos(\omega t)\hat{y}$.

(b) Para $x > 0$ temos $\vec{E}_1(x,t) = -\frac{c\mu_0 JD}{2} cos(\omega t - kx)\hat{y}$, onde $\mid \vec{J} \mid = J$ e $\vec{B}_1(x,t) = \hat{x} \times \frac{\vec{E}_1(x,t)}{c}$. Para $x < 0$ temos $\vec{E}_1(x,t) = -\frac{c\mu_0 JD}{2} cos(\omega t + kx)\hat{y}$ e $\vec{B}_1(x,t) = B_0 cos(\omega t + kx)\hat{z}$.

(c) Para que o campo $\vec{E}_1$ cancele exatamente $\vec{E}_0$ é necessário que $\frac{2E_0}{c\mu_0}$, de onde para $x > 0$ temos $\vec{E}_1(x,t) = -E_0 cos(\omega t - kx)\hat{y}$ e para $x < 0$ $\vec{E}_1(x,t) = -E_0 cos(\omega t + kx)\hat{y}$.

(d) Para $x > 0$ temos $\vec{B}_1(x,t) = -B_0 cos(\omega t - kx)\hat{z}$e para $x < 0$ $\vec{B}_1(x,t) = B_0 ccos(\omega t + kx)\hat{z}$.

6. (a) A relação entre os campos elétrico e magnético é dada por:

$$\hat{z} \times \vec{E}_0 = \frac{\omega}{k}\vec{B}_0,$$
$$\hat{z} \times \vec{B}_0 = -\frac{\omega}{kc^2}\vec{E}_0.$$

das equações acima, é fácil ver que:

$$k = \frac{\omega}{c}$$

(b) As densidades de energia armazenadas pelos campos elétrico e magnético:

$$\begin{aligned} u_E =& \frac{\epsilon_0}{2} \mid \vec{E} \mid^2 = \frac{\epsilon_0}{2} \mid \vec{E}_0 \mid^2, \\ u_M =& \frac{1}{2\mu_0} \mid \vec{B}_0 \mid^2 = \frac{1}{2\mu_0}\frac{1}{c^2} \mid \vec{E}_0 \mid^2 \\ =& \frac{\epsilon_0}{2} \mid \vec{E}_0 \mid^2 . \end{aligned}$$

A media temporal da densidade de energia total é:

$$\langle u_{EM} \rangle = u_{EM} = \epsilon_0 \mid \vec{E}_0 \mid^2$$

(c) A pressão de radiação no objeto é dada por:

$$P = \frac{\langle \vec{S} \rangle}{c},$$

em que a media temporal do vetor de Poyting é:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{\mu_0 c} |\vec{E}_0|^2.$$

Portanto:

$$P = \frac{1}{\mu_0 c^2} |\vec{E}_0|^2 = \epsilon_0 |\vec{E}_0|^2 = u_{EM},$$

(d)

$$\oint_\Sigma \langle \vec{S}(t) \rangle \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \langle \vec{S} \rangle |_{r=r_{ts}} 4\pi r_{ts}^2 = (1350W/m^2)(4\pi)(1.5\times 10^{11} m)^2 = 3.8\times 10^{26} W.$$