Respostas da Lista de Exercícios II

1. Um raio de luz que parte de um meio com índice de refração n_1, à distância p de uma superfície refratora esférica de raio R, é refratado por tal superfíe e focalizado à uma distância q num meio de índice de refração n_2, conforme a figura 1 abaixo.

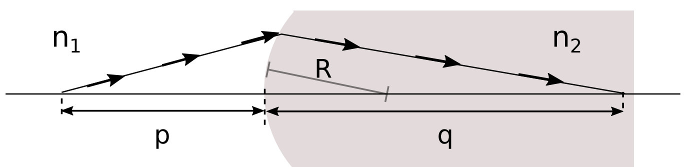

Figura 1

Nesse caso, na aproximação para-axial, vale a relação (veja HMN_4, equação (2.31)):
$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$
No caso: $n_1 = n_{ar} = 1$ e $n_2 = n$. Ainda, como os raios incidentes são paralelos, a equação deve ser usada com $p \to \infty$, e portanto temos:
$$\frac{n}{q} = \frac{n-1}{R}$$
que resolvendo para n fornece:
$$n = \frac{q}{q-R}$$
No item (a), $q = 2R$, e portanto $n = 2$.

No item (b), $q = R$ e a equação acima mostra que isso é impossível e corresponde à situação limite em que $n \to \infty$.

2. (a) O foco de uma lente de material homogêneo com índice de refração n_2, cujos lados são superfícies esféricas de raios R_1 e R_2 (onde

$R > 0$, $R < 0$, e $R \to \infty$, para superfícies convexas, côncavas e planas, respectivamente), imersa num meio de índice de refração n_1 é dado por (veja HMN_4, equação (2.42)):

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Com $n_1 = 1$, $n_2 = 1,5$, $R_1 = 20$cm e $R_2 \to \infty$, se obtém $f = 40$ cm.

(b) A posição q da imagem é dada em termos da posição p do objeto por:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

Como $p = f$, a equação acima fornece $q \to \infty$, e a imagem é focalizada no infinito. Como o aumento longitudinal $m = -q/p$ é também infinito, o mesmo acontece com o tamanho da imagem.

A figura 2 abaixo representa a situação.

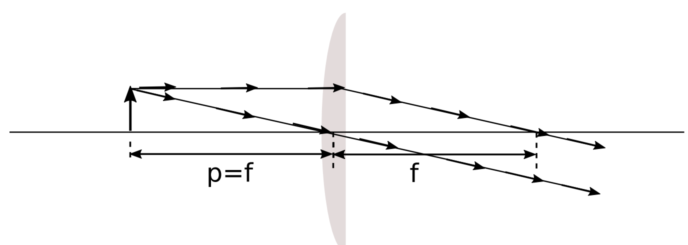

Figura 2

3. (a) A lente de foco f, a uma distância p do objeto, entre este e o anteparo, focalizará sua imagem no anteparo a uma distância $q = D - p$ somente se p satisfizer:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{D - p} = \frac{1}{f}$$

Que corresponde à equação de segundo grau para p:

$$p^2 - Dp + Df = 0$$

E possui as soluções p_+ e p_- dadas por

$$p_\pm = \frac{D \pm \sqrt{D(D-4f)}}{2} \tag{1}$$

Que são ambas positivas e menores que D, mostrando que há duas posições da lente que focalizam a imagem no anteparo. A distância entre essas posições (veja figura 3 abaixo) é

$$d = p_+ - p_- = \sqrt{D(D-4f)}$$

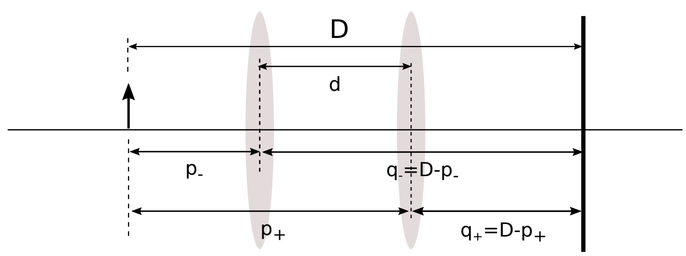

Figura 3

(b) Se $y_\pm$ são os tamanhos das imagens com a lente em $p_\pm$, respectivamente, e y é o tamanho do objeto, temos: (veja HMN_4, equação (2.43))

$$\frac{y_\pm}{y} = -\frac{q_\pm}{p_\pm} = \frac{p_\pm - D}{p_\pm}$$

Então, notando de (1) que $p_+ + p_- = D$

$$\begin{aligned} y_+y_- &= (\frac{p_+ - D}{p_+})(\frac{p_- - D}{p_-}y^2) \\ &= \frac{p_+p_- - D(p_+ + p_- - D)}{p_+p_-}y^2 \\ &= \frac{p_+p_-}{p_+p_-}y^2 \\ &= y^2 \end{aligned}$$

Assim, $y = \sqrt{y_+ y_-}$.

4. (a) Observe a figura 4 abaixo

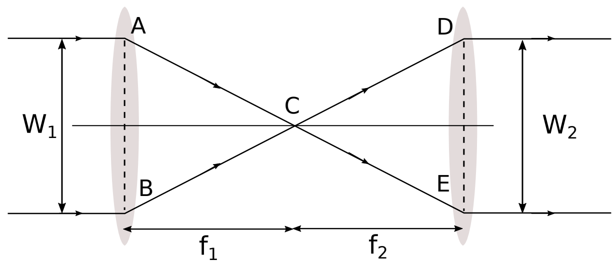

Figura 4

Os triangulos ABC e CDE são semelhantes pois $\overline{ED} \parallel \overline{AB}$ e $A\hat{C}B = E\hat{C}D$. Assim:

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{f_2}{f_1} \tag{2}$$

De onde a relação procurada segue imediatamente.

(b) Para esse caso a figura 5 representa a situação

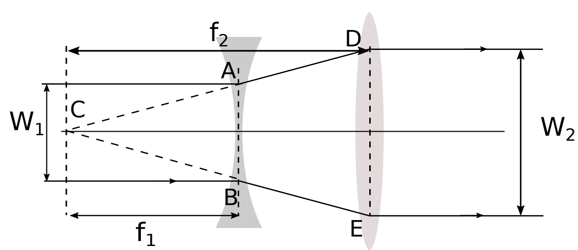

Figura 5

Novamente os triangulos ABC e CDE são semelhantes pois $\overline{ED} \parallel \overline{AB}$ e $A\hat{C}B = E\hat{C}D$ e portanto a relação (2) continua válida.

5. Raios que partem de um objeto luminoso sobre o eixo das lentes e a uma distância p são defletidos pelo par de lentes e convergem novamente ao eixo a uma distância q, conforme a figura 6 abaixo

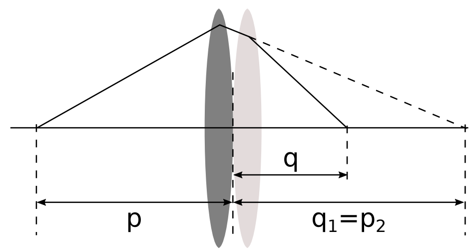

Figura 6

Quando refratado pela primeira lente o raio segue em direção ao ponto no eixo que dista q_1 das lentes, de modo que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{f_1} \tag{3}$$

Esses mesmo raio atinge a segunda lente como os raios de um objeto em $p_2 = -q_1$ (o argumento de usar a imagem de uma lente como objeto da seguinte é geral e pode ser usado para obter a imagem de objetos por um sistema de lentes composto qualquer) e é refratado para formar a imagem em q, então:

$$\frac{-1}{q_1} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f_2} \tag{4}$$

Somando (3) e (4) se obtém

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{\frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2}}$$

Que mostra que o sistema equivale a uma única lente com foco

$$f = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2}$$

6. (a) O hipermétrope (míope) deve usar lentes convergentes(divergentes) pois assim raios que atingiriam o olho paralelamente agora estaram convergindo (divergindo) de tal forma a adiantar (atrasar) a formação da imagem.

(b) Como para uma lente em geral a imagem se aproxima da lente quando o objeto se afasta e vice-versa, podemos deduzir que a miopia (hipermetropia) é agravada quando o objeto é afastado (aproximado), até chegar ao limite em que a contração (distensão) da retina não é suficiente para anular seu efeito e se fazem necessárias lentes ou óculos para tal fim. Assim, o míope (hipermétrope) precisa de seus óculos para enxergar objetos distantes (próximos).

(c) As lentes bifocais possuem um campo para visão de longe alcance e outro para visão de curto alcance, servem àqueles que possuem presbiopia ou vista cansada e permite que seu usuário evite variações extremas da retina.

7. O microscópio composto funciona de acordo com a figura 7 abaixo

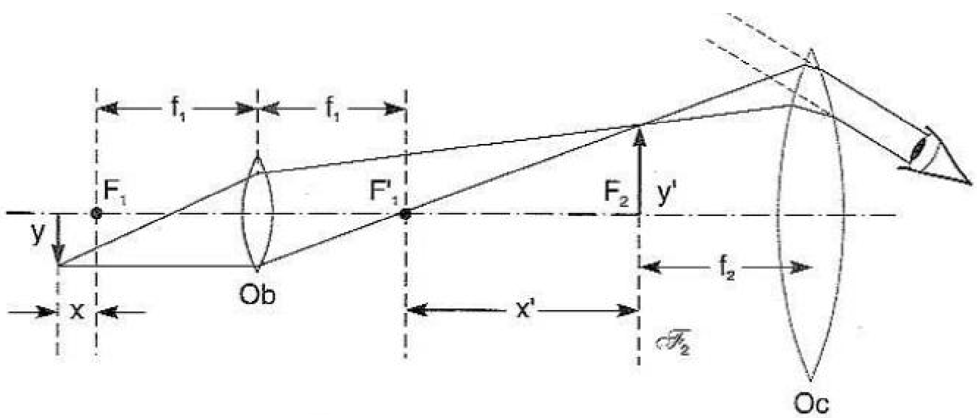

Figura 7

Onde o aumento é dado por (veja HMN_4, equação (2.49)

$$m = \frac{-f_1}{x} = \frac{-x'}{f_1} \tag{5}$$

Pelo enunciado sabemos que

$x + f_1 = 10$ mm

$f_1 + x' + f_2 = 300$ mm

$f_2 = 50$ mm

O sistema pode ser resolvido com a relação adicional (5) e fornece $x \approx 0,38$ mm, $x' \approx 240,38$ mm e $f_1 \approx 9,61$ mm. A relação (5) fornece então um aumento de aproximadamente $24,98$.

8. A trajetória é solução da equação diferencial

$$\vec{\bigtriangledown} n = \frac{d}{ds}\left(n\frac{d\vec{x}}{ds}\right) \tag{6}$$

Onde $\vec{x} = (x(s), y(s), z(s))$ é a trajetória parametrizada pelo comprimento de arco s e $n = n(z) = n_0 + n_1 z$.

Temos ainda as condições iniciais:

$$\vec{x}(0) = (0,0,0) \tag{7a}$$

$$\frac{d\vec{x}}{ds}(0) = (\alpha_0, 0, \beta_0) \tag{7b}$$

Onde $\alpha_0^2 + \beta_0^2 = 1$.

Como $\vec{\bigtriangledown} n = (0,0,n_1)$, a equação (6) pode ser integrada entre 0 e s fornecendo, mediante a condição inicial (7b), a equação diferencial vetorial de primeira ordem

$$(\alpha_0, 0, \beta_0 + n_1 s) = n_z(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}) \tag{8}$$

Como $n(z) \neq 0, \forall z$, a segunda componente fornece

$$y(s) = constante = y(0) = 0$$

E portanto o movimento o raio permanece no plano (x, z). A primeira componente de (8) é

$$\frac{dx}{ds} = \frac{n_0\alpha_0}{n_0 + n_1 z} \tag{9}$$

Para obter a equação para z, ao invés de usar (8), onde temos $\dot{z}$ como função de s, exploramos que $ds^2 = dx^2 + dz^2$ e portanto

$$\frac{dz}{ds} = \sqrt{1 - (\frac{dx}{ds})^2}$$

Para obter, através de (9), $\dot{z}$ em termos de z:

$$\frac{dz}{ds} = \sqrt{\frac{n^2(z) - n_0^2\alpha_0^2}{n^2(z)}} \tag{10}$$

E então, dividindo (9) por (10) e usando a regra da cadeia, obtemos a equação diferencial para $x(z)$:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{dx}{ds}\frac{ds}{dz} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{n_0+n_1z}{\alpha_0 n_0}\right)^2 - 1}}$$

Que integrada entre 0 e z, e notando que (7a) implica $x(z = 0) = x(s = 0) = 0$ fornece

$$x = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{\left(\frac{n_0+n_1z}{\alpha_0 n_0}\right)^2 - 1}}$$

A integral à direita pode ser resolvida pela mudança de variável

$$\cosh w = \left(\frac{n_0 + n_1 z}{\alpha_0 n_0}\right)$$

$$dz = \frac{n_0\alpha_0}{n_1} dw$$

Fornecendo

$$x(z) = \frac{n_0\alpha_0}{n_1}\left[\cosh^{-1}\left(\frac{n_0 + n_1 z}{\alpha_0 n_0}\right) + \cosh^{-1}\left(\frac{1}{\alpha_0}\right)\right] \tag{11}$$

Que é a equação da trajetória.

Por fim, usando a relação $\alpha_0^2 + \beta_0^2 = 1$, além da igualdade[1]

$$\cosh^{-1} t = \log\left(t + \sqrt{t^2 - 1}\right)$$

Podemos escrever a equação da trajetória (11) como

$$x(z) = \log\left[\frac{n(z) + \sqrt{n^2(z) - n_0^2\alpha_0^2}}{n_0(1+\beta_0)}\right].$$

[1]Que por sua vez pode ser obtida resolvendo para u a definição

$$\cosh u = \frac{e^u + e^{-u}}{2} = t$$

A qual pode ser entendida como equação de segundo grau em e^u.