Lista de Exercícios XIII

① – (a) Reemplazar e calcular. Notar que $A_{\mu\nu}B^{\nu\mu} = A_{\nu\mu}B^{\mu\nu}$ para qualquer $A_{\mu\nu}$ e $B^{\mu\nu}$ dado que os indices repetidos são "dummy" indices e podem ser trocados de nome sem alterar o resultado.

– (b) Idem.

– (c) Idem.

– (d) Idem.

② – (a) Avaliar ambos lados e comparar.

– (b) Idem.

③ – (a) $v_i' = \frac{v_i+u}{1+uv_i/c^2}$ com $i = 1, 2, 3, 4$.

– (b) Escrever as equações de conservação no referencial S', utilizando a definição de energía-momentum não-relativista. Logo, considerar as equações de conservação no referencial S para derivar a condição

$$\frac{u}{c^2}(v_1 + v_2) + \frac{u^2}{c^4}v_1v_2 = \frac{u}{c^2}(v_3 + v_4) + \frac{u^2}{c^4}v_3v_4$$

e notar que esta equação não é compatível com a equação de conservação de momentum no referencial S, $m_1v_1 + m_2v_2 = m_3v_3 + m_4v_4$.

– (c) Escrever as equações de conservação no referencial S', utilizando a definição de energía-momentum relativista. Notar que $\gamma(v)v = \gamma_1\gamma_2(v_1 + v_2)$ com v a velocidade obtida da lei de adição relativista. Considerar a equação de conservação de energía no referencial S e derivar a equação de conservação de momentum no referencial S. Logo, as equações em ambos referenciais são compativeis.

④ – (a)

$$\frac{\nu'}{\nu} = \left(\frac{c-v}{c+v}\right)^{1/2}$$

– (b)

$$\frac{\nu'}{\nu} = \frac{c - v\cos\alpha}{(c^2 - v^2)^{1/2}}$$

⑤ Consideremos o caso onde ambos sujeitos estão afastando-se, o emissor no eixo y e o receptor no eixo x. Definimos ν_1 como a frequência emitida e ν_2 a frequência recebida. Logo

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{\sqrt{2}c - v}{\sqrt{2}c + v}$$

⑥ No referencial do espelho os ângulos de incidência e reflexão são iguais, em particular podemos definir o ângulo como α'.

– (a) Primeiro, provar por separado que

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{c\cos\alpha' - v}{c - v\cos\alpha'}\\ \sin\theta &= \frac{c\sin\alpha'\sqrt{1 - v^2/c^2}}{c - v\cos\alpha'}\end{aligned}$$

derivar a expressão para $\tan\theta/2$

$$\tan(\theta/2) = \left(\frac{c+v}{c-v}\right)^{1/2}\tan(\alpha'/2)$$

Para o ângulo ϕ consideramos o reemplazo $v \to -v$ para finalmente encontrar que

$$\frac{\tan\theta/2}{\tan\phi/2} = \left(\frac{c+v}{c-v}\right)$$

– (b) Considerando o problema (4b), mostrar que

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{c + v\cos\theta}{c - v\cos\phi}$$

e logo utilizar as expressões para $\sin\alpha'$ e $\cos\alpha'$ em termos de θ e ϕ.