Lista de Exercícios XII

① $v = c\frac{2\sqrt{3}}{3l_c}\sqrt{l_c^2 - l^2}$

② – (a) Definimos $\vec{n} = (1/v)(v_x, v_y, v_z)$ com v o módulo da velocidade, $\beta = v/c$ e $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$, logo temos que
$\Lambda(\vec{v}) =$

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta n_x & -\gamma\beta n_y & -\gamma\beta n_z \\ -\gamma\beta n_x & 1+(\gamma-1)n_x^2 & (\gamma-1)n_x n_y & (\gamma-1)n_x n_z \\ -\gamma\beta n_y & (\gamma-1)n_x n_y & 1+(\gamma-1)n_y^2 & (\gamma-1)n_y n_z \\ -\gamma\beta n_z & (\gamma-1)n_x n_z & (\gamma-1)n_y n_z & 1+(\gamma-1)n_z^2 \end{pmatrix}$$

– (b) Direto

– (c) $\Lambda^{-1}(\vec{v}) =$

$$\begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta n_x & \gamma\beta n_y & \gamma\beta n_z \\ \gamma\beta n_x & 1+(\gamma-1)n_x^2 & (\gamma-1)n_x n_y & (\gamma-1)n_x n_z \\ \gamma\beta n_y & (\gamma-1)n_x n_y & 1+(\gamma-1)n_y^2 & (\gamma-1)n_y n_z \\ \gamma\beta n_z & (\gamma-1)n_x n_z & (\gamma-1)n_y n_z & 1+(\gamma-1)n_z^2 \end{pmatrix}$$

– (d) Notar que o produto de dois boosts $\Lambda(\vec{u})$ e $\Lambda(\vec{v})$, da forma anterior, com $\vec{u}$ e $\vec{v}$ gerais, geram uma TL que é o produto de uma rotação e um boost. Logo, para simplificar o problema considere situações mais simples, por exemplo $u = (u_x, 0, 0)$ e $v = (v_x, 0, 0)$ os quais geram um boost só. Depois pode considerar $u = (u_x, 0, 0)$ e $v = (0, v_y, 0)$, os quais geram uma rotação e um boost.

③ – (a)

$$\begin{aligned} w^\mu &= (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu w'^\nu \\ &= (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu \Lambda^\nu{}_\rho w^\rho \\ &= \delta^\mu{}_\rho w^\rho \\ &= w^\mu \end{aligned}$$

– (b)

$$w''^\mu = \Lambda(\vec{u})^\mu{}_\nu \Lambda(\vec{v})^\nu{}_\rho w^\rho$$

④ – (a)

$$\begin{aligned} A'_{\mu\nu}B'^{\nu} &= (\Lambda^{-1})^{\rho}{}_{\mu}(\Lambda^{-1})^{\sigma}{}_{\nu}\Lambda^{\nu}{}_{\gamma}A_{\rho\sigma}B^{\gamma} \\ &= (\Lambda^{-1})^{\rho}{}_{\mu}\delta^{\sigma}{}_{\gamma}A_{\rho\sigma}B^{\gamma} \\ &= (\Lambda^{-1})^{\rho}{}_{\mu}A_{\rho\sigma}B^{\sigma} \end{aligned}$$

Logo, podemos dizer que $A_{\mu\nu}B^{\nu}$ transforma como um tensor covariante de um indice só. Idem para os demais.

⑤ – (a)

$$\begin{aligned} A'_{\mu} &= g'_{\mu\nu}A'^{\nu} \\ &= (\Lambda^{-1})^{\rho}{}_{\mu}g_{\rho\sigma}A^{\sigma} \\ &= (\Lambda^{-1})^{\rho}{}_{\mu}A_{\rho} \end{aligned}$$

– (b)

$$\begin{aligned} A^{\mu} &= g^{\mu\nu}A_{\nu} \\ &= g^{\mu\nu}g_{\nu\rho}A^{\rho} \\ &= \delta^{\mu}{}_{\rho}A^{\rho} \\ &= A^{\mu} \end{aligned}$$

– (c)

$$\begin{aligned} g'_{\mu\nu}A'^{\mu}A'^{\nu} &= A'_{\nu}A'^{\nu} \\ &= (\Lambda^{-1})^{\rho}{}_{\nu}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}A_{\rho}A^{\sigma} \\ &= \delta^{\rho}{}_{\sigma}A_{\rho}A^{\sigma} \\ &= A_{\sigma}A^{\sigma} \\ &= g_{\mu\nu}A^{\mu}A^{\nu} \end{aligned}$$

⑥ – (a) $g^{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$.

– (b) $g'_{\mu\nu} = (\Lambda^{-1})^{\rho}{}_{\mu}(\Lambda^{-1})^{\sigma}{}_{\nu}g_{\rho\sigma}$. Logo considere as matrices do problema 2 e a forma matricial de $g_{\rho\sigma}$ para calcular as componentes de $g'_{\rho\sigma}$.

– (c) Escrever as coordenadas $x'^{\mu} = (t, r, \theta, \phi)$ em termos das coordenadas $x^{\mu} = (t, x, y, z)$ e logo considerar que $dx^{\mu} = (\partial x^{\mu}/\partial x'^{\nu})dx'^{\mu}$.