Lista de Exercícios VIII

① Observe que o potencial vetor $\vec{A}$ está relacionado com o campo magnético $\vec{B}$ da mesma forma que $\vec{B}$ está relacionado com a densidade de corrente $\vec{J}$. Isto é $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$, enquanto que $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_o \vec{J}$. Qual é a declaração a respeito de $\vec{A}$ que corresponde ao enunciado de que a integral de linha de $\vec{B}$, sobre qualquer percurso fechado, é igual a μ_o vezes a corrente enlaçaada pela curva? Calcule o potencial vetor que corresponde a um campo uniforme e paralelo ao eixo z: $B_x = 0$, $B_y = 0$ e $B_z = B_o$.

② Um disco de raio R, com uma densidade de carga uniforme σ, está girando com velocidade angular $\vec{\omega} = \omega \hat{z}$ (figura 1).

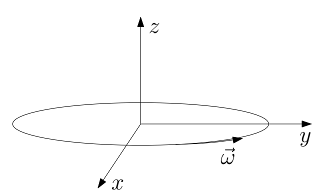

Figura 1:

(a) Considere um anel circular de raio ρ e largura $d\rho$, que contém uma carga dq. Mostre que a corrente produzida por este anel é dada por $dI = \dfrac{\omega}{2\pi}\, dq = \omega\, \sigma\, \rho\, d\rho$.

(b) Utilize o resultado do item (a) para mostrar que o campo magnético no centro do disco é dado por $\vec{B} = \dfrac{1}{2}\mu_o \sigma \omega R\, \hat{z}$.

(c) Calcule o campo magnético em um ponto do eixo do disco a uma distância z do centro. Verifique seu resultado comparando-o com o do item anterior para o caso $z = 0$.

③ Um destes itens é um campo eletrostático impossível. Qual?

(a) $\vec{E} = k[(2xz + 3y^2)\, \hat{y} + 4yz^2\, \hat{z}]$

(b) $\vec{E} = k[y^2\, \hat{x} + (2xy + z^2)\, \hat{y} + 2yz\, \hat{z}]$

Aqui, k é uma constante com as unidades apropriadas.
Encontre o potencial eletrostático para o campo possível adotando $V(\text{x=0}, \text{y=0}, \text{z=0}) = 0$. Cheque sua resposta calculando $\vec{\nabla}V$.

④ Uma fita metálica com 2 cm de largura e 0.1 cm de espessura é percorrida por uma corrente de 10 A num campo magnético uniforme $B = 2$ T. Se a tensão Hall medida é $\varepsilon = 8\mu$V, calcule:

(a) Considerando que estes portadores sejam elétrons, sua densidade na fita.

(b) A velocidade de migração dos elétrons.

⑤ Uma corrente elétrica I flui por um longo fio cilíndrico de raio a. A corrente está distribuída de tal modo que J é proporcional à distância ao eixo, ρ. Calcule o campo magnético $\vec{B}$ dentro e fora do fio.

⑥ Um condutor cilíndrico, muito longo, cuja seção reta circular tem raio R, é percorrido por uma corrente I (entrando no plano da figura). No interior do condutor existe um furo cilíndico de raio a, cujo eixo é paralelo ao eixo do condutor, e fica a uma distância b do mesmo. Suponha que o eixo do condutor é o eixo dos z e que o eixo do furo é a reta $y = 0$ e $x = b$. Determine o campo magnético $\vec{B}$ nos pontos dos eixos x e y que distam $2R$ da origem.

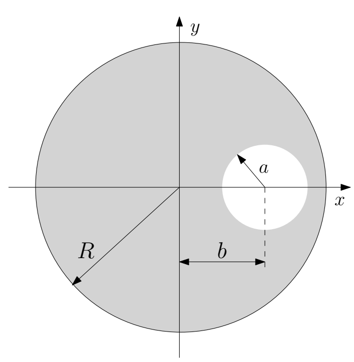

Figura 2:

⑧ Teste o teorema de Stokes para a função $\vec{v} = xy\,\hat{x} + 2yz\,\hat{y} + 3xz\,\hat{z}$ usando a área triangular da figura. Ou seja, calcule explicitamente a integral superficial do rotacional de $\vec{v}$ e a integral de linha $\oint \vec{v}.d\vec{l}$, mostrando que são idênticas.

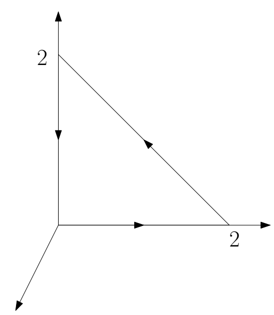

Figura 3:

⑨ Calcule o campo magnético $\vec{B}$ e o potencial vetor $\vec{A}$ no ponto P das configurações mostradas na figura 4 e depois verifique que $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$. Considere que a corrente que passa pelos fios é I e:

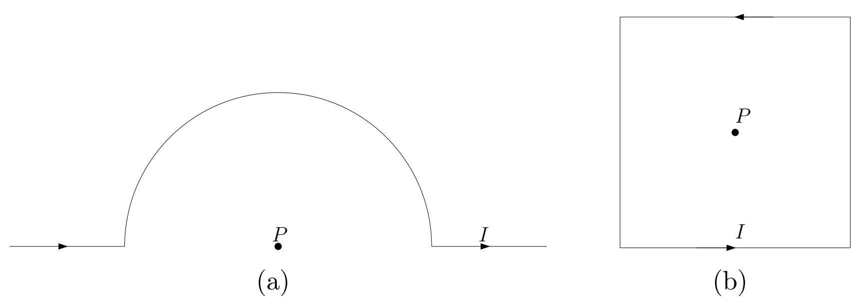

Figura 4:

(a) As porções retilíneas do fio são supostas muito longas e a porção semicircular tem raio R.

(b) A espira é quadrada e tem lado L.

⑩ O tensor de Levi-Civita é definido para $(i, j, k = 1, 2, 3)$ como:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{quando} \quad (i,j,k) = (1,2,3),\ (2,3,1),\ (3,1,2), \\ -1 & \text{quando} \quad (i,j,k) = (1,3,2),\ (3,2,1),\ (2,1,3), \\ 0 & \text{quando} \quad i = j\,, \text{ou}\, i = k\,,\ \text{ou}\, j = k. \end{cases}$$

Usando a propriedade $\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$ e, quando é preciso, a definição das componentes do produto vetorial $(\vec{a} \times \vec{b})_i = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} a_j b_k$, mostrar que

1. $\sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijm} = 2\delta_{km}$;
2. $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\phi) = 0$;
3. $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$;
4. $\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$.