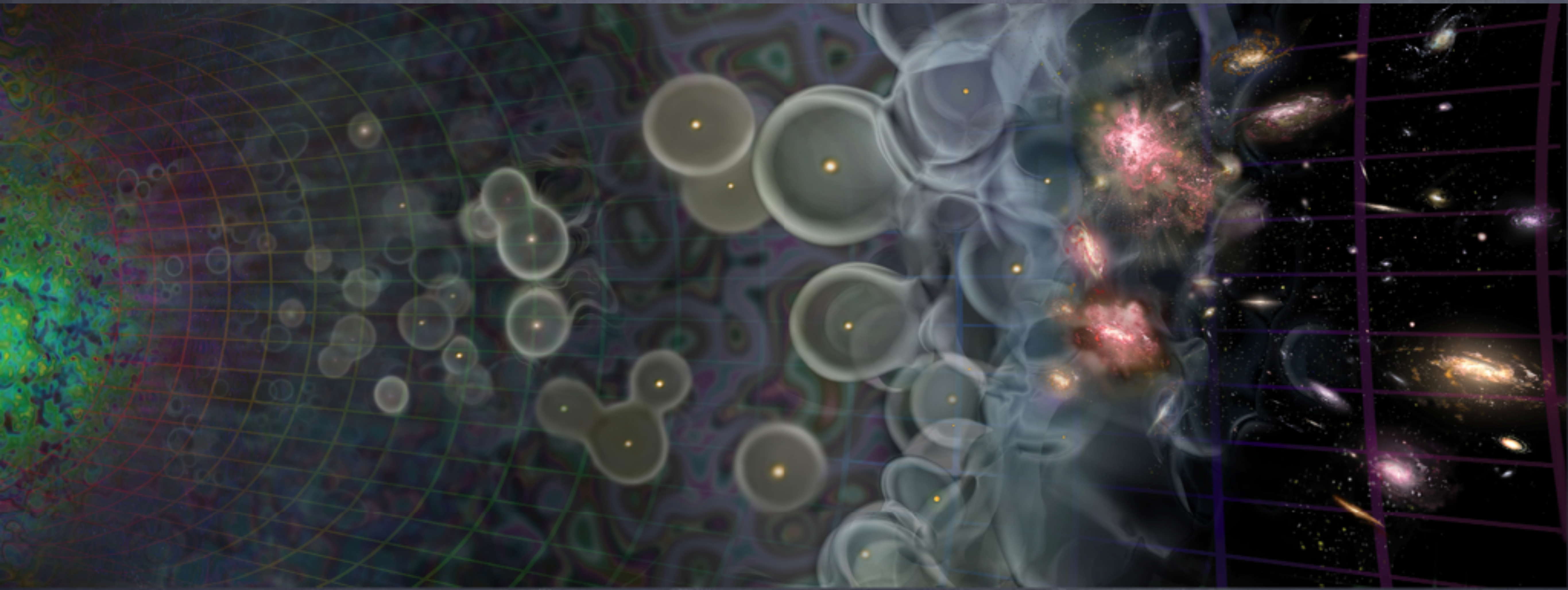
Física II



Um pouco de Relatividade Geral

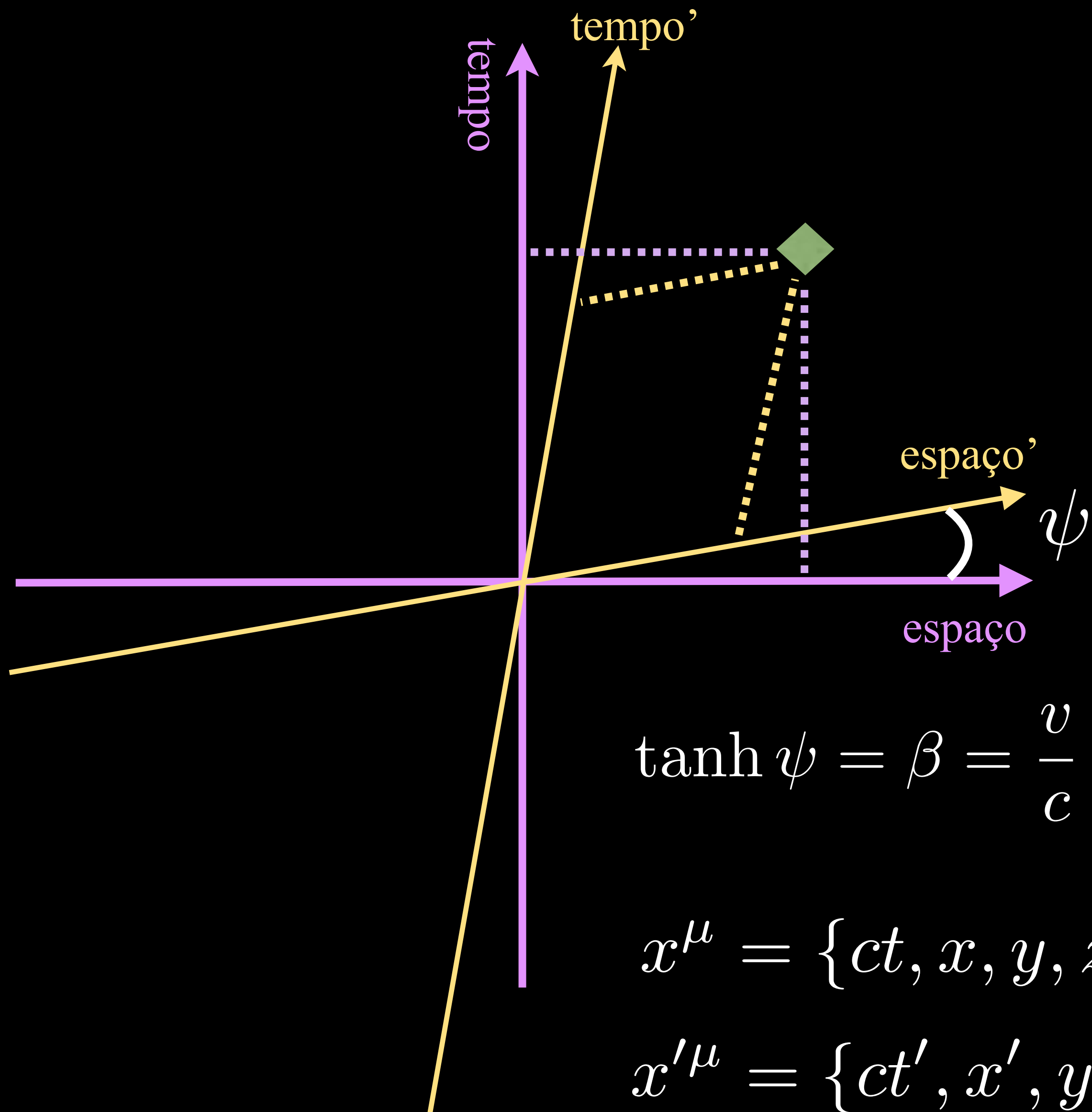
- Relatividade Restrita (revisão rápida)
- O Princípio da Equivalência
- Coordenadas generalizadas e a métrica
- A Relatividade Geral de Einstein
- Buracos negros

Bibliografia adicional:

C. Boyer, "A History of Mathematics"

H. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski & H. Weyl,
"The Principle of Relativity" ("O Princípio da Relatividade")

Relatividade especial: o espaço-tempo de Minkowski



$$\tanh\psi = \beta = \frac{v}{c}$$

$$x^{\mu} = \{ct, x, y, z\}$$

$$x'^{\mu} = \{ct', x', y', z'\}$$

β=v/c,
$\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$

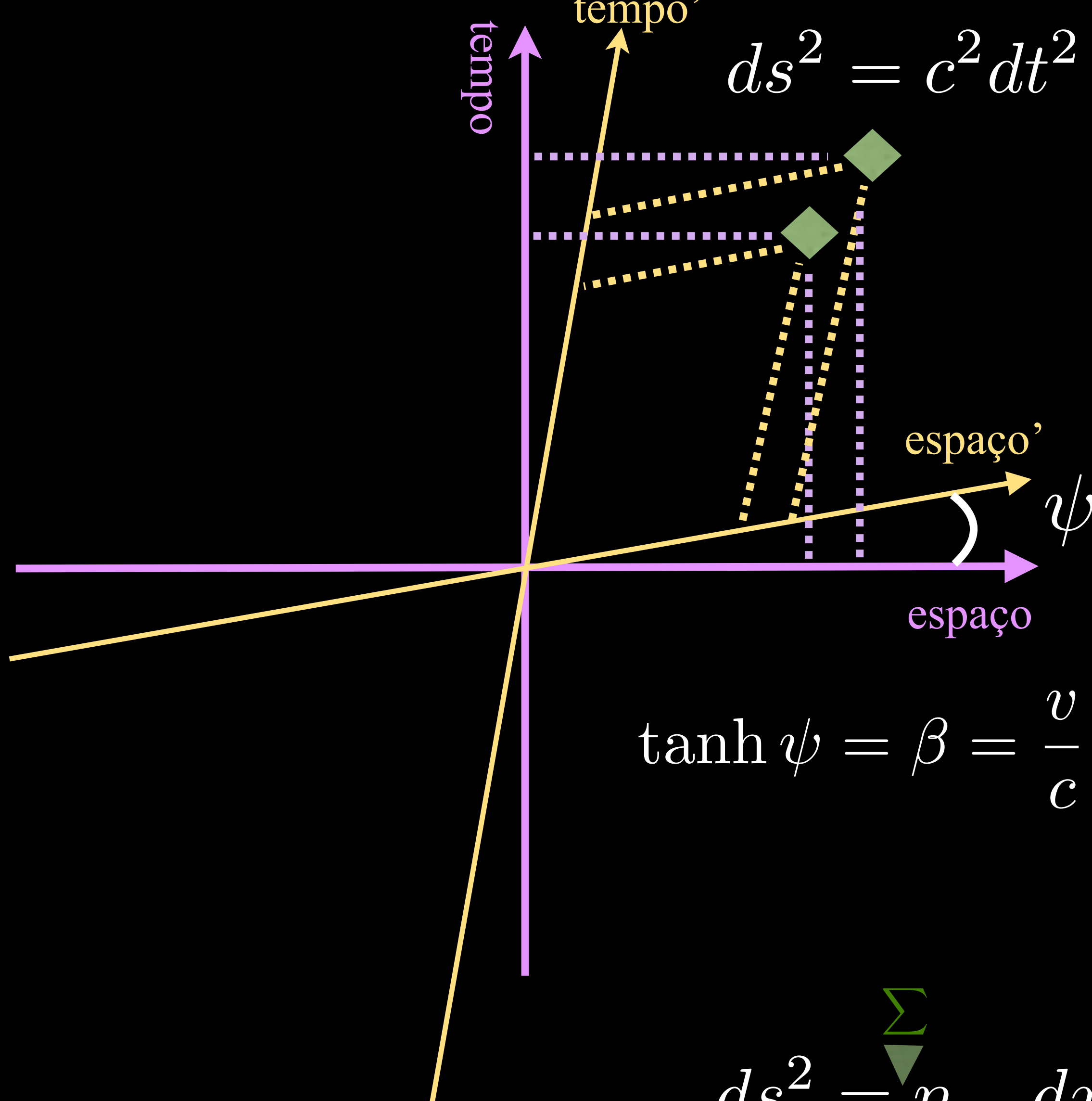
$$\begin{aligned} ct' &= \gamma(ct - \beta\, x) \\ x' &= \gamma(x - \beta\, ct) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$

$$x'^{\,\mu} = \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, x^{\nu}$$

$$x'^{\,\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, x^{\nu}$$

Notação de Einstein

Relatividade especial: o espaço-tempo de Minkowski



$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\vec{x}^2$$

$$\tanh \psi = \beta = \frac{v}{c}$$

$$ds^2 = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} \eta_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu$$

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

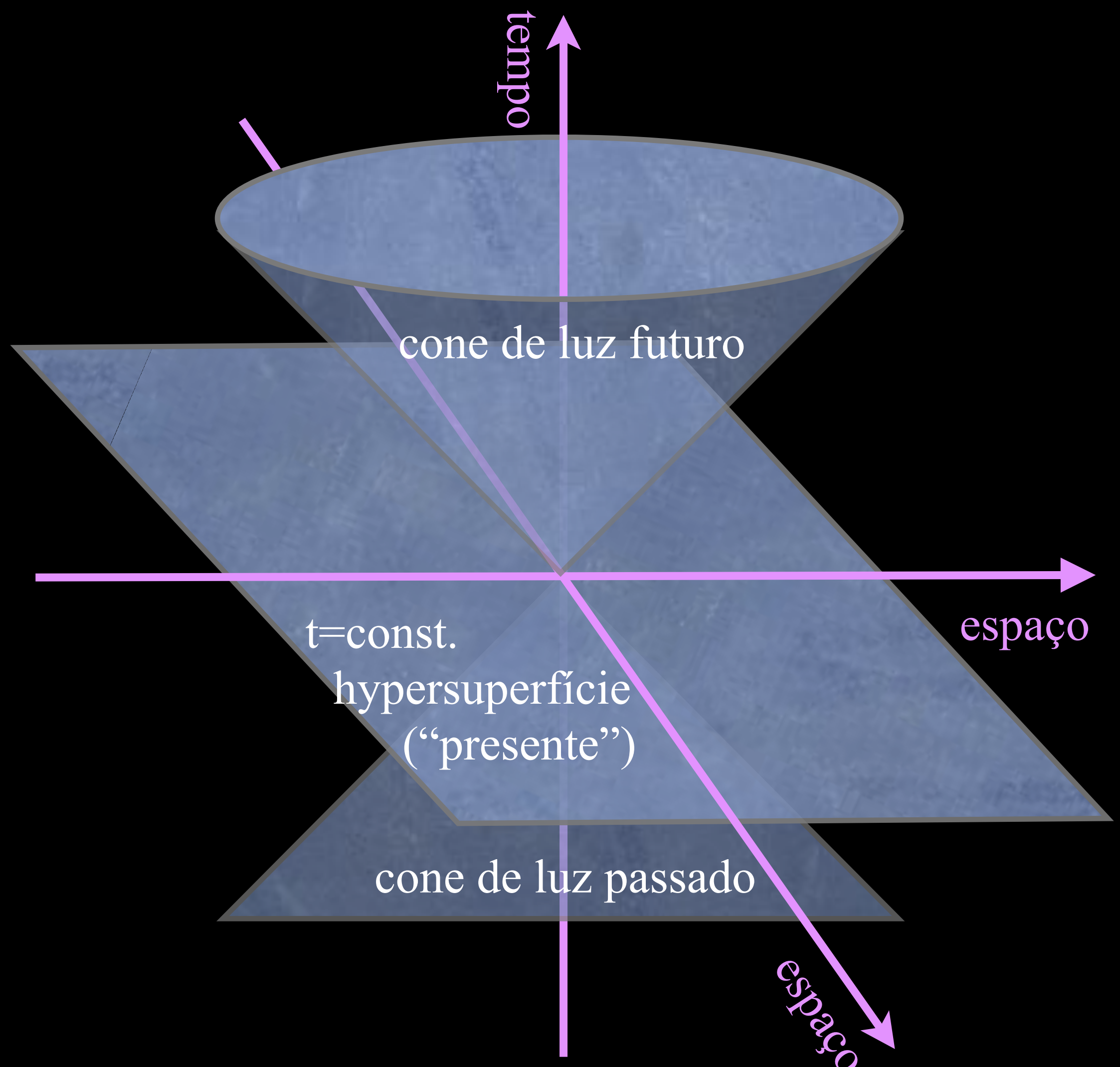
$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu$$

$$ds'^2 = \eta_{\mu\nu}\, dx'^\mu\, dx'^\nu$$

Invariância de Lorentz:

$$ds^2 = ds'^2$$

Relatividade especial: o objeto fundamental é o cone de luz



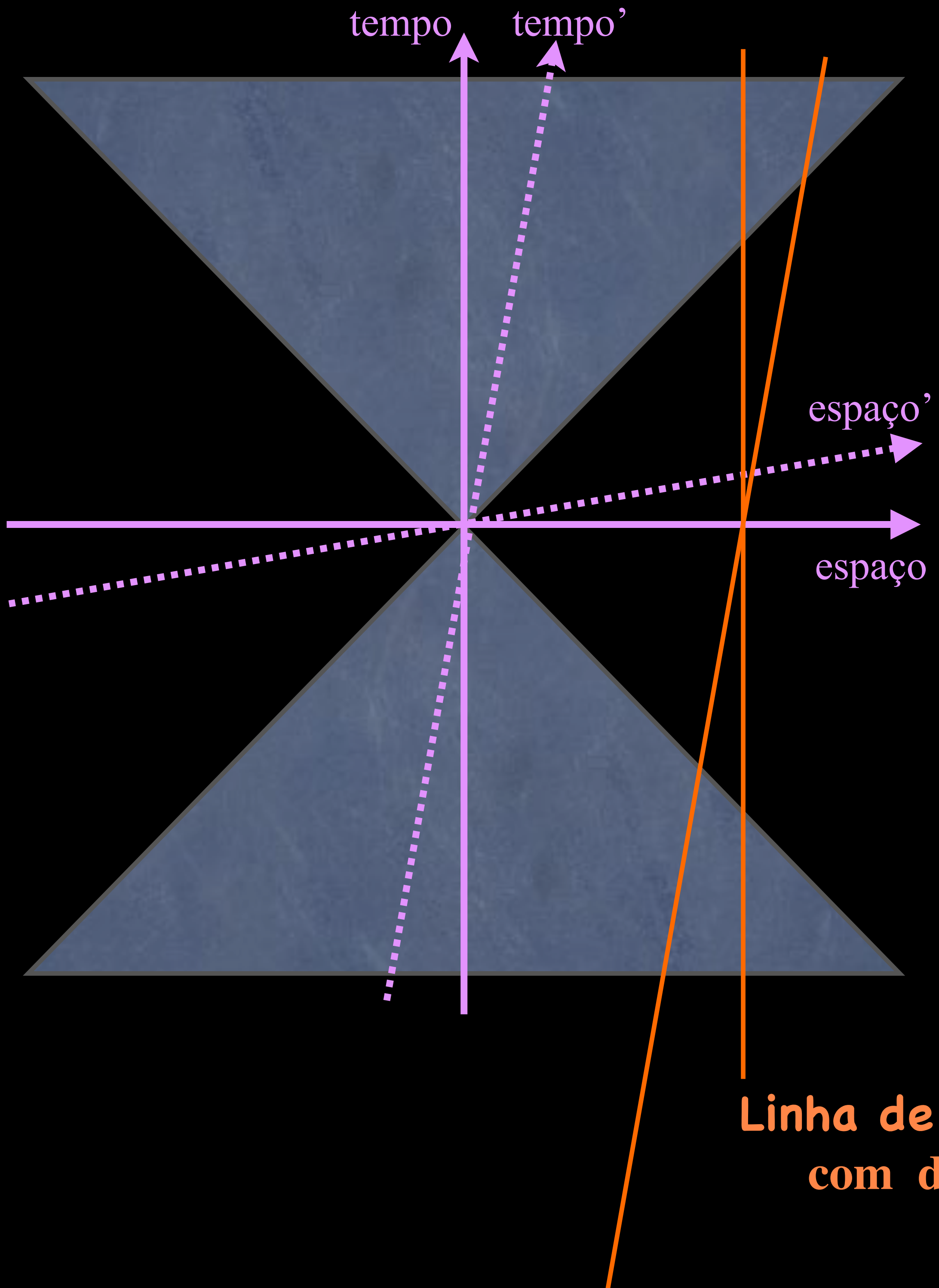
Cone de luz:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\vec{x}^2 \quad \Rightarrow \quad 0$$

Luz:

$$|\vec{v}| = \left| \frac{d\vec{x}}{dt} \right| = c$$

Relatividade especial: invariância do cone de luz sob "**boosts**"



$$dx^\mu \to dx'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \, dx^\nu$$

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \frac{v^i}{c} \\ -\gamma \frac{v_j}{c} & \delta_{ij} + (\gamma - 1) \frac{v^i \, v_j}{v^2} \end{pmatrix}$$

$$\Lambda^\mu{}_\alpha(v) \Lambda^\alpha{}_\nu(-v) = \delta^\mu_\nu$$

Linha de mundo de observador
com dx/dt = 0 , dx'/dt' = -v

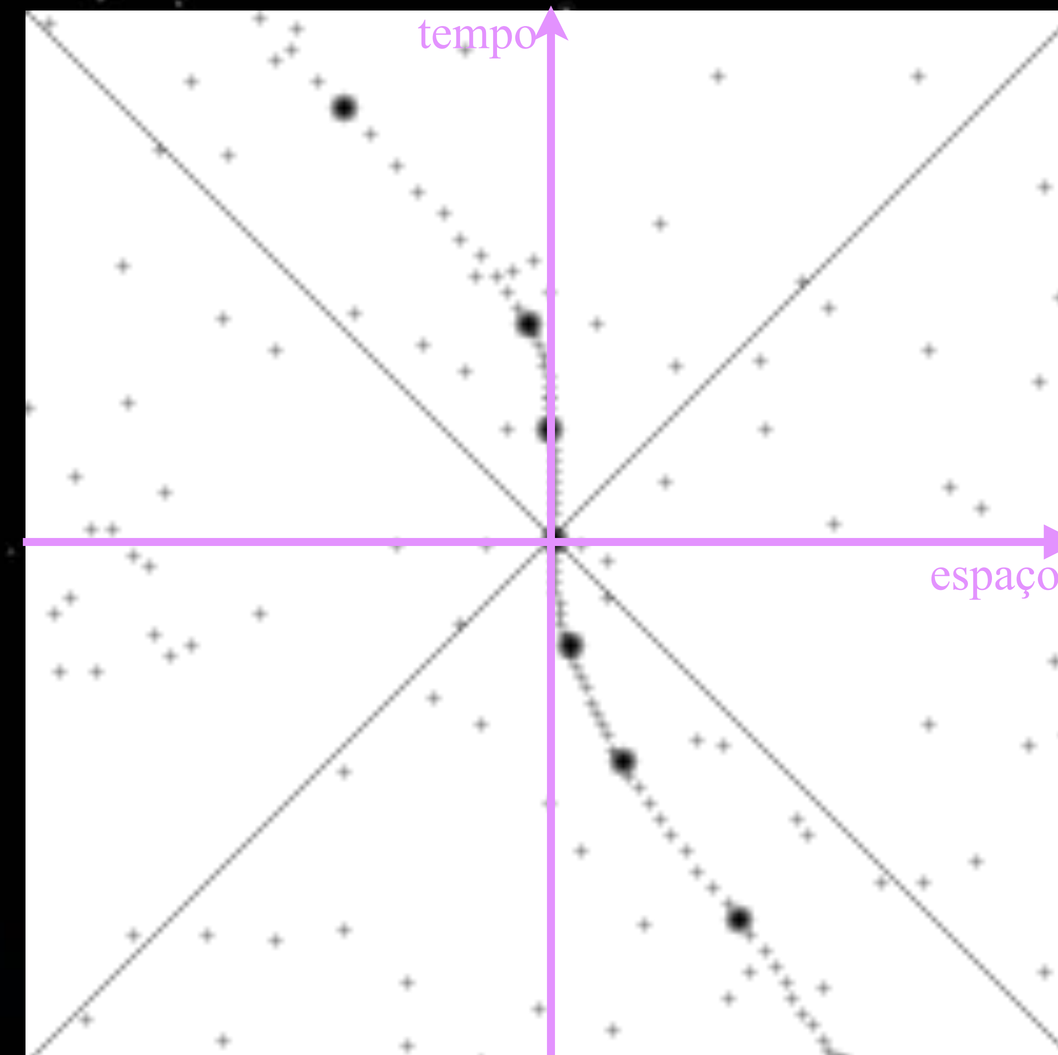
$$\frac{d\, x'^{\,\mu}}{d\, x^\nu} = \Lambda^\mu{}_\nu$$

Linha de mundo de observador
com dx/dt = +v , dx'/dt' = 0

O **princípio de equivalência** de Einstein (1915!) permite tratar referenciais acelerados ➠ covariância sob transf. de coordenadas generalizadas

Observador estacionário num campo gravitacional

Observador acelerado (queda livre) = observador inercial

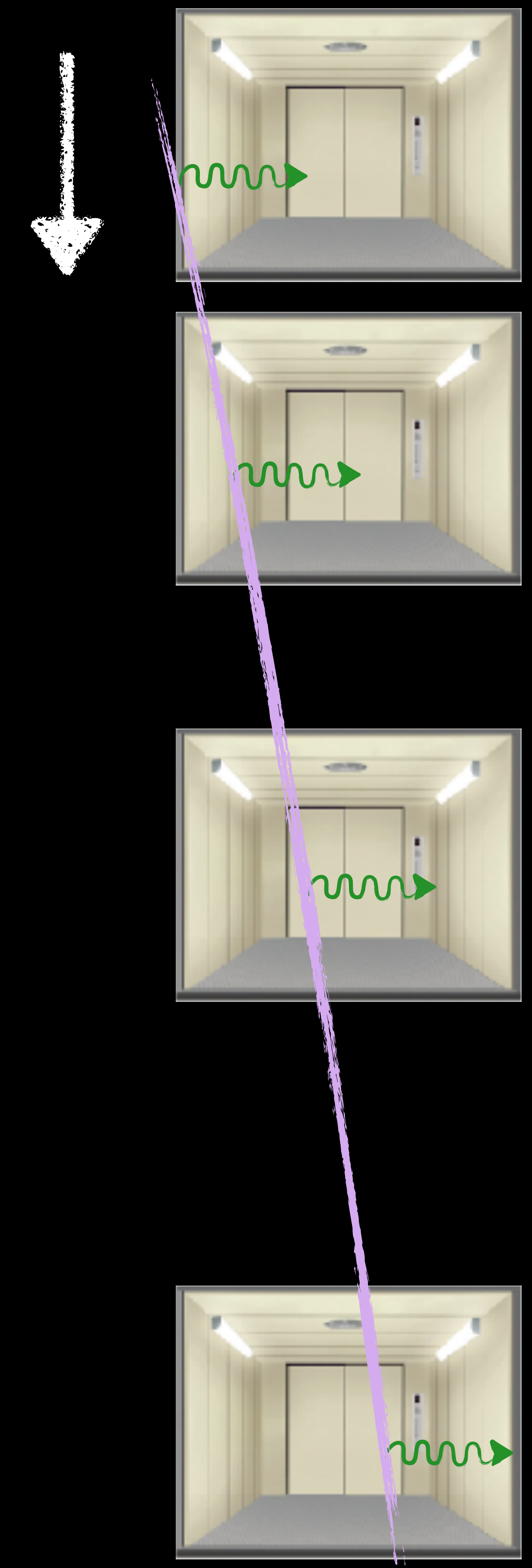


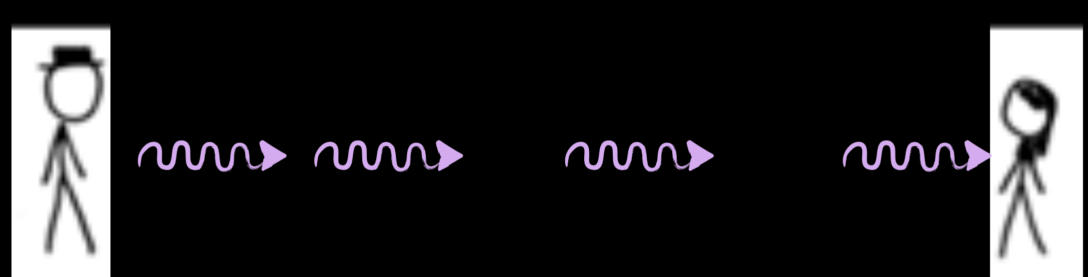
$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\vec{x}^2$$

$$\Rightarrow ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu$$

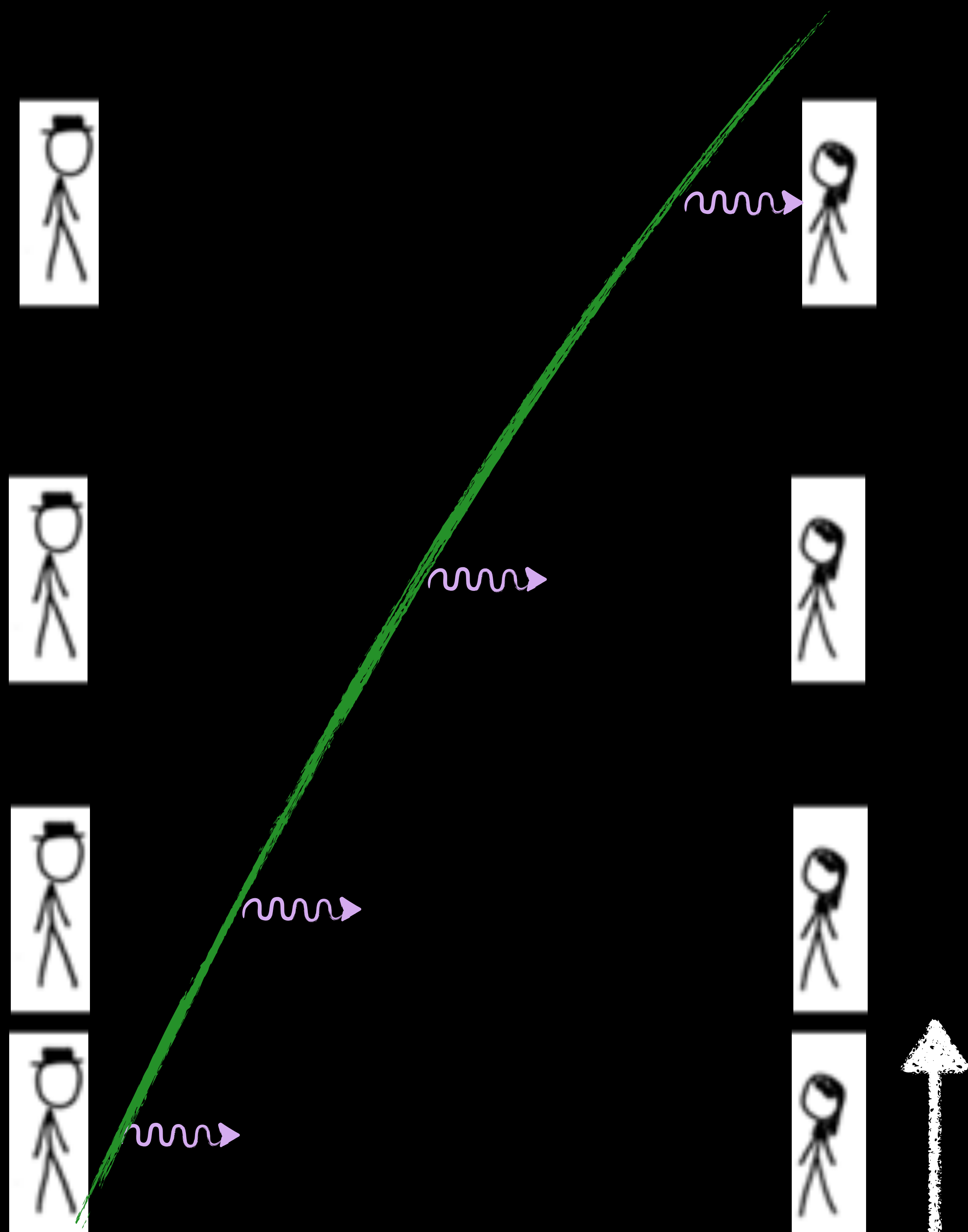
métrica: geometria do espaço-tempo

O elevador de Einstein visto de um observador parado na Terra:





O cara parado na Terra, visto desde o elevador de Einstein:



Mas... e agora? E o cone de luz?

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\vec{x}^2 \quad \Rightarrow \quad 0$$

Pelo **Princípio de Fermat**, a luz tem que percorrer o caminho que **minimiza o tempo** de viagem.

Mas como o menor tempo de viagem da luz pode ser uma **curva**, e não uma **reta**?

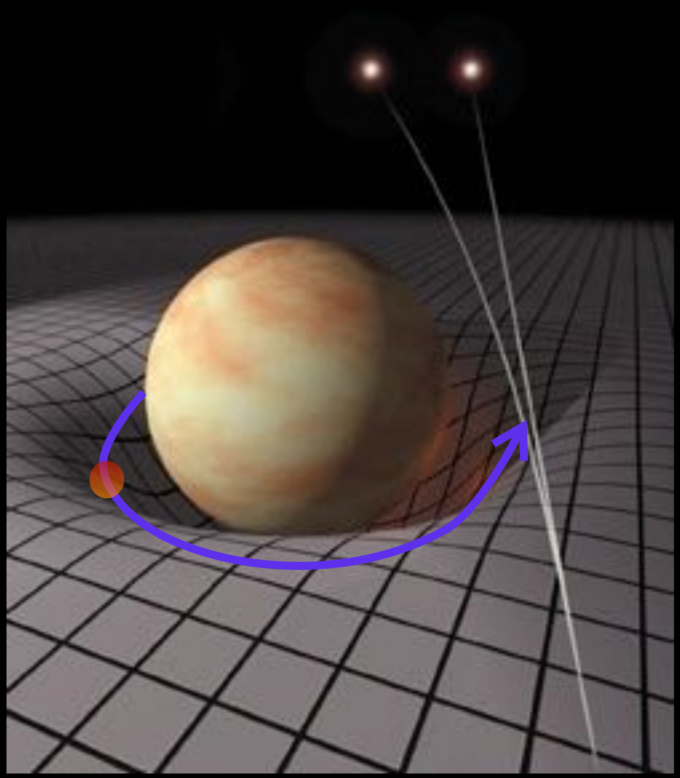
A resposta é que precisamos pensar em **espaços curvos** - ou melhor, **espaços-tempo curvos**!

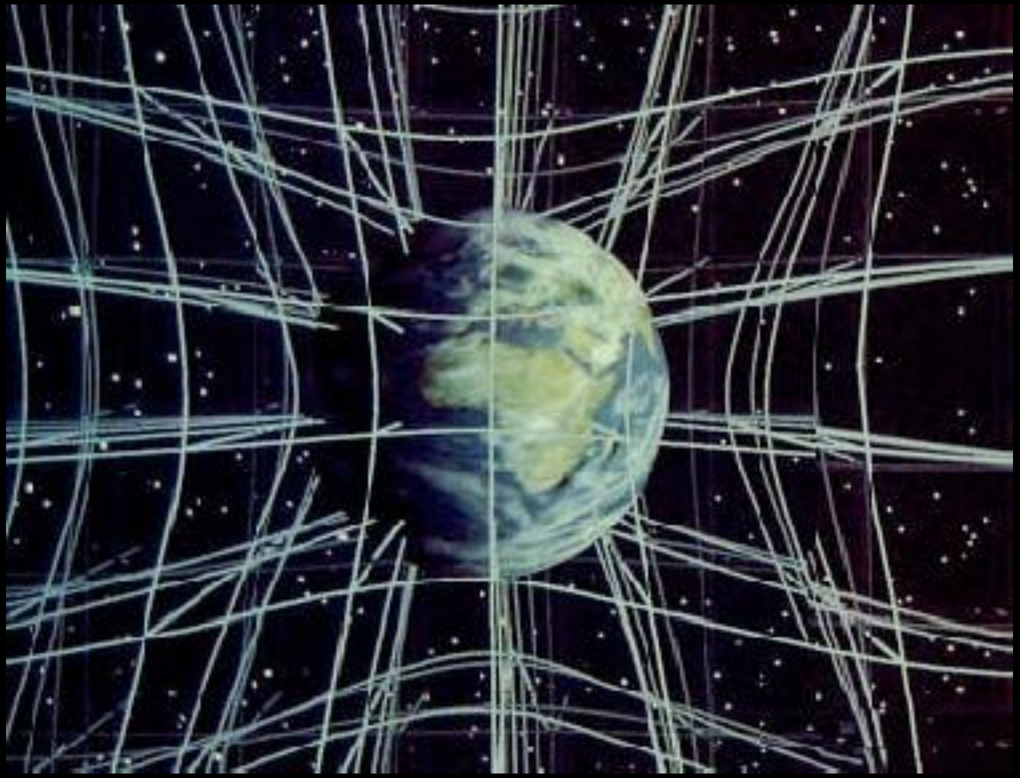
$$ds^2 = \boxed{g_{\mu\nu}}\, dx^\mu \, dx^\nu$$

Nas teorias "covariantes" da gravidade (p. ex., a Relatividade Geral), a **gravidade** é uma manifestação da **curvatura do espaço-tempo**

Nessas teorias, a **métrica** do espaço-tempo (i.e., sua **geometria**) tem dois papéis:

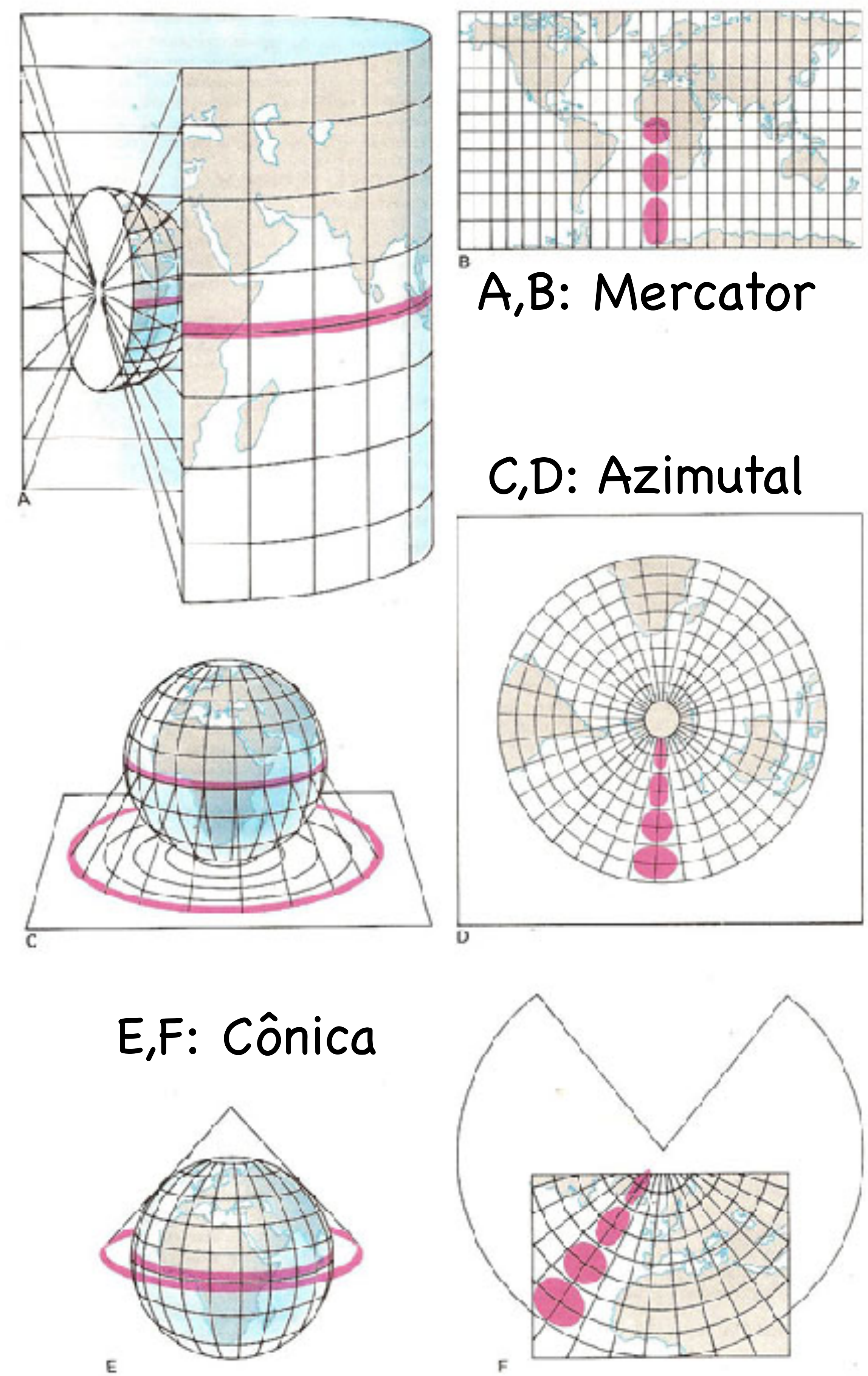
ela **determina** a trajetória da matéria... ...e é **curvada** pela matéria





- O que significa uma "geometria" do espaço-tempo?
- O que determina essa geometria?
- Como podemos fazer medidas que testam essa teoria?

Um exercício simples:
a esfera e suas projeções



Qual a **rota mais rápida** de São Paulo a Paris?

E de São Paulo a Tokyo?...

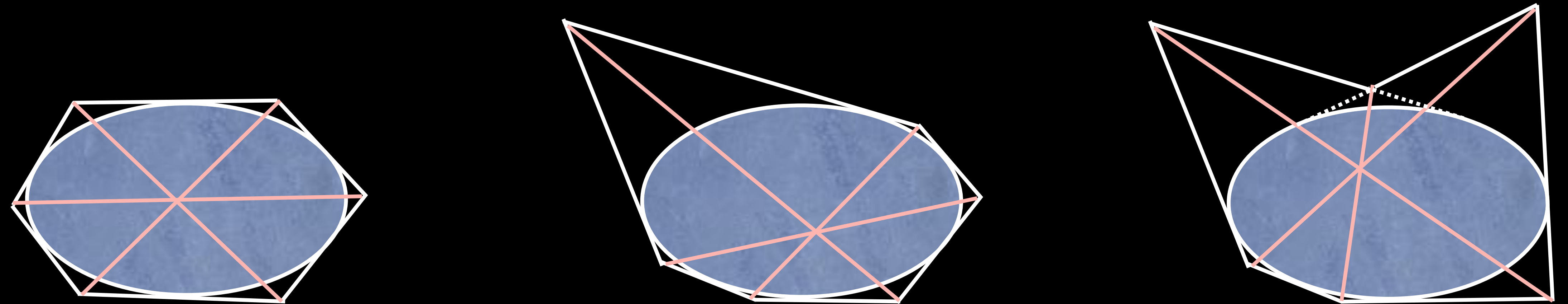
Esta é a rota mais rápida de São Paulo a Tokyo!

Preâmbulo: A pré-história da Geometria Diferencial

Após Newton, a Física se concentrou na Mecânica, Óptica, Termodinâmica; os matemáticos ficaram obcecados com a Análise; a Geometria era considerada assunto de 2ª classe

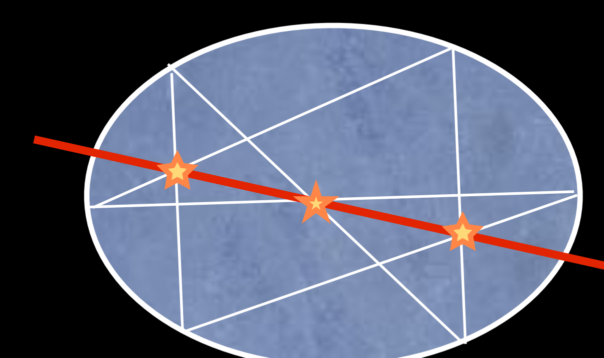
O retorno da Geometria iniciou c. 1806, quando **Charles J. Brianchon** (que tinha 21 anos) e **Gaspard Monge** ("Comte de Péluse") provaram o seguinte teorema:

Os seis lados de um hexágono circunscrevem uma seção cônica SSE as três linhas comuns aos três pares de vértices opostos têm um ponto em comum



Isso foi logo reconhecido como o **dual** (ou "dual projetivo") do teorema de **Pascal** de 1639 (demonstrado quando Pascal tinha 16 anos!), que afirma o seguinte:

Se um hexágono arbitrário está inscrito numa seção cônica, então os três pares das continuações de lados opostos se encontram em pontos numa linha reta.



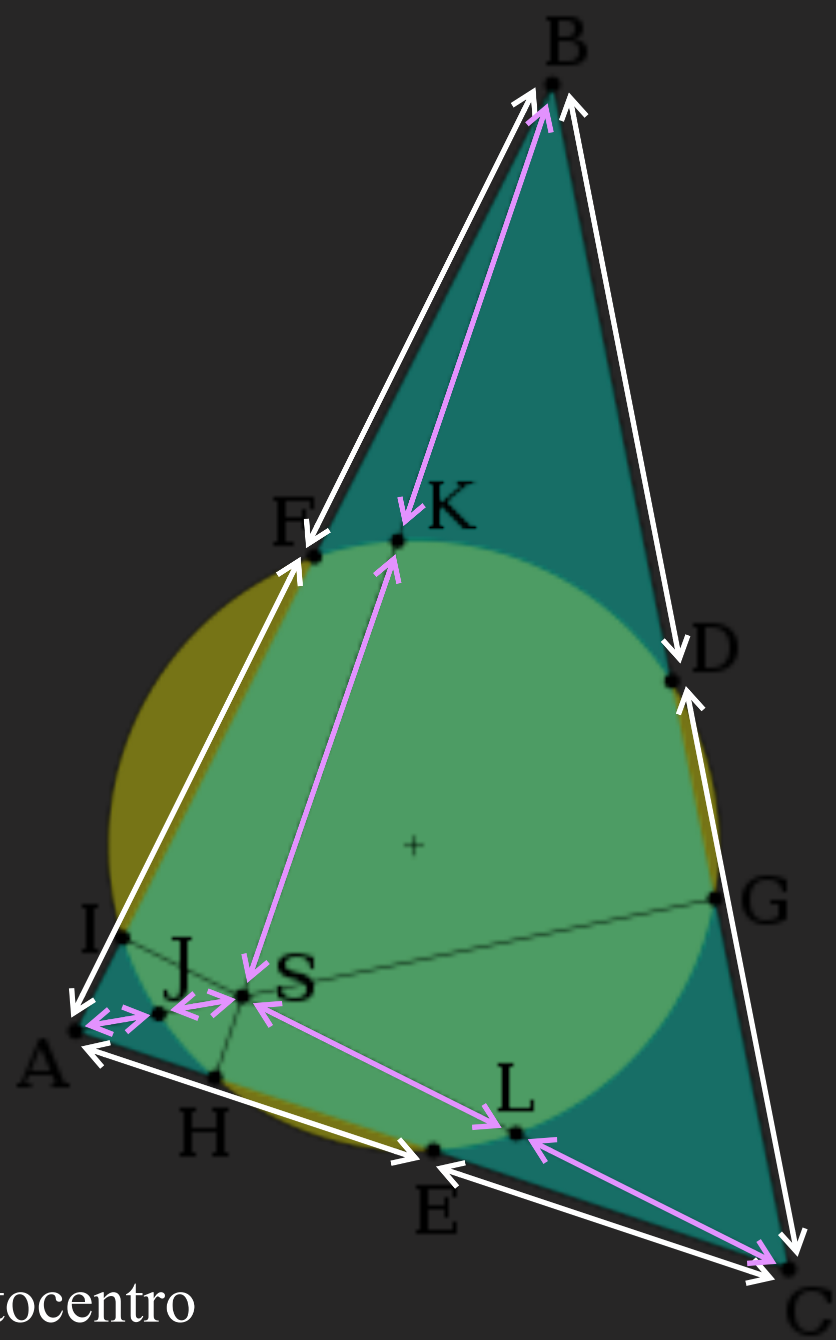
Já esses resultados inspiraram **Karl Feuerbach**, em 1822, a (re-)descobrir as propriedades do **círculo de 9 pontos**

(Brianchon chegou antes…)

… e provar o **Teorema de Feuerbach:**

AE=EC
CD=DB
BF=FA

SL=LC
SK=KB
SJ=JA

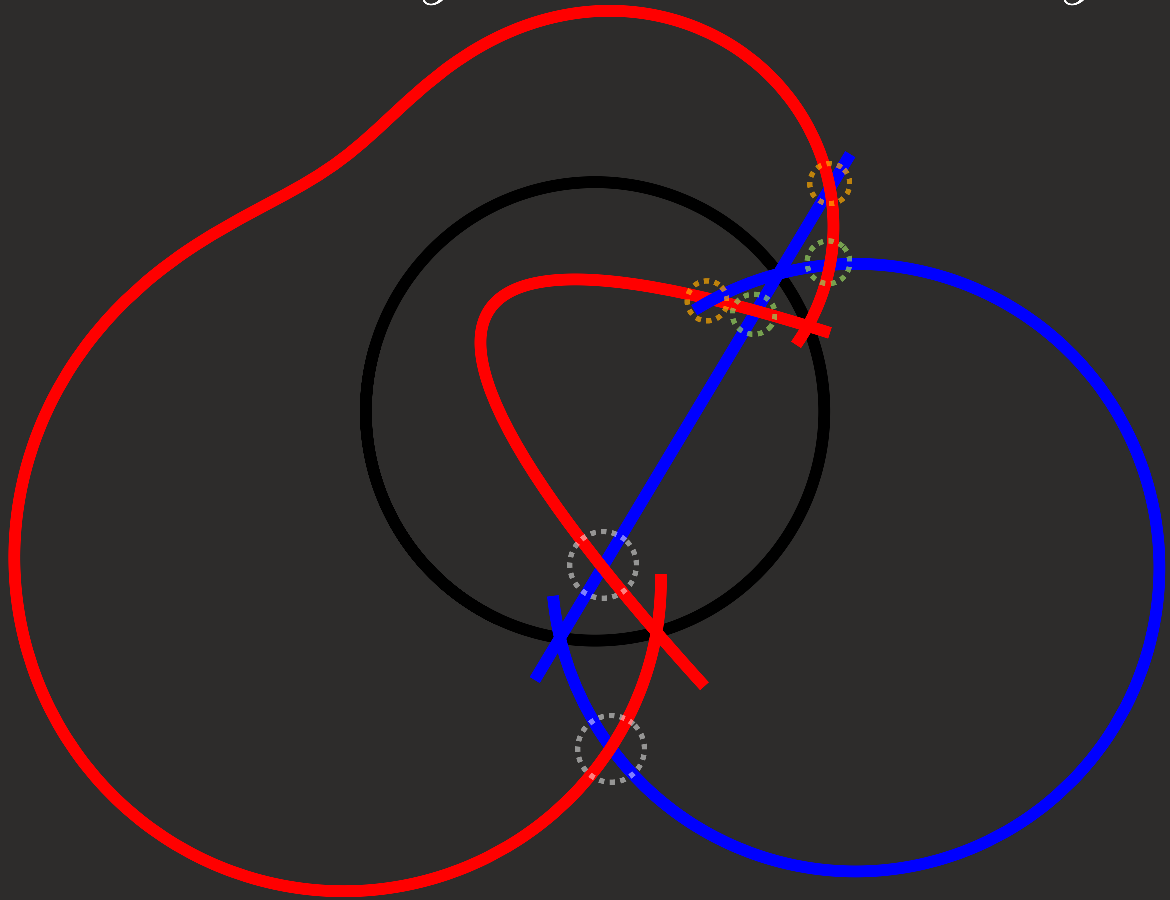


S: Ortocentro
AG, BH, CI: Altitudes

"o mais belo teorema na Geometria desde Euclides"

... que, por sua vez, levou **Jakob Steiner** (Steiner/Geometria :: Gauss/Análise) a descobrir, c. 1824, as leis da "geometria inversiva": a todo ponto dentro (fora) de um círculo, corresponde outro ponto, fora (dentro) dele, dado pela transformação (para raio unitário):

$$x' = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad , \quad y' = \frac{y}{x^2 + y^2}$$



Essa é uma **transformação conforme** - que preserva os **ângulos** de linhas que cruzam. (Essas transformações foram depois re-descobertas por outros, incluindo **Lord Kelvin**, no contexto da Eletrostática - no **método das imagens**.)

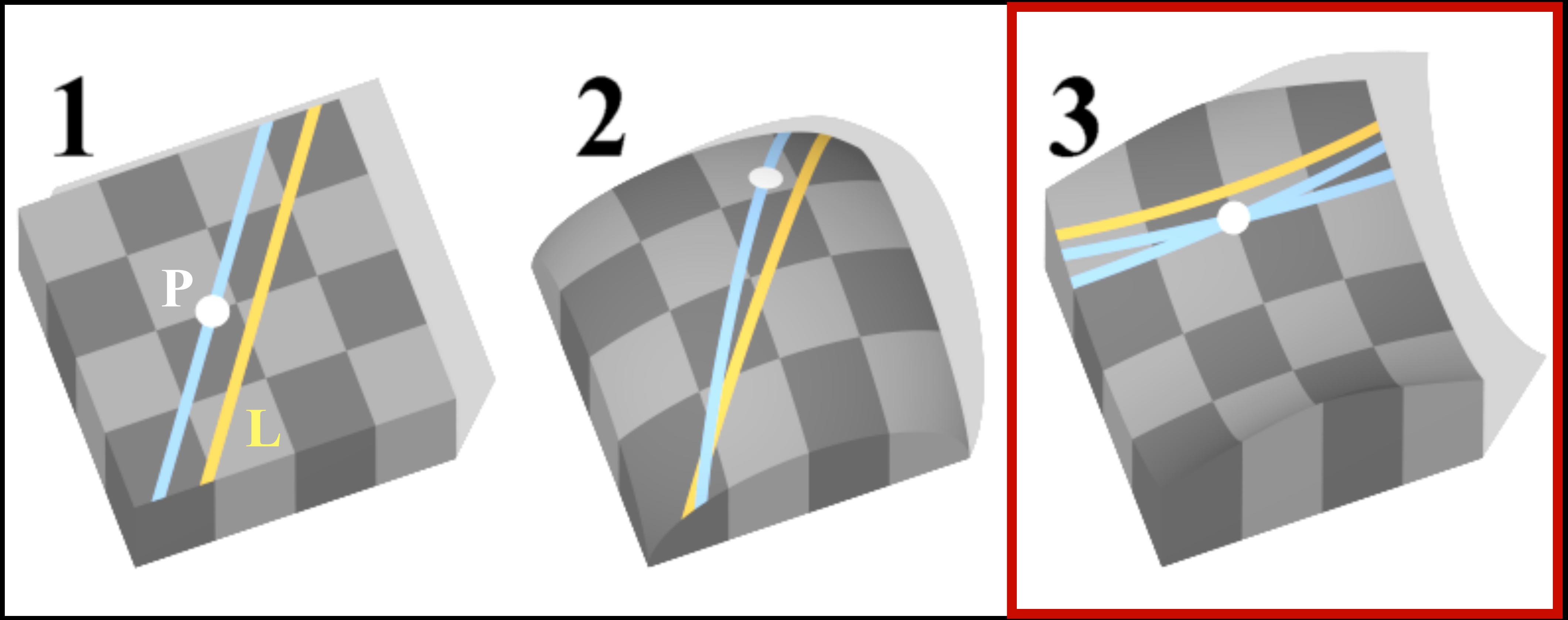


O estudo de transformação de coordenadas e de dualidades (e.g., pontos/linhas) reacendeu o interesse na Geometria a partir do Séc. XIX.

Em ~1826 **Nicolai Lobachevski** (e, independentemente, **C. F. Gauss** e **János Bolyai**) miraram num dos pilares da Geometria Euclideana: o "**postulado das paralelas**":

> **dada uma linha L e um ponto P, pode existir apenas uma linha que passa por P e não cruza L.**

Lobachevski mostrou que isso era **falso**, construindo espaços "curvos", infinitos, em 2D, (que ele chamava "geometrias imaginárias") onde existem **muitas linhas por P:**



Espaço de Gauss-Lobachesvki -Bolyai

1. Plano, infinito (Euclidean)

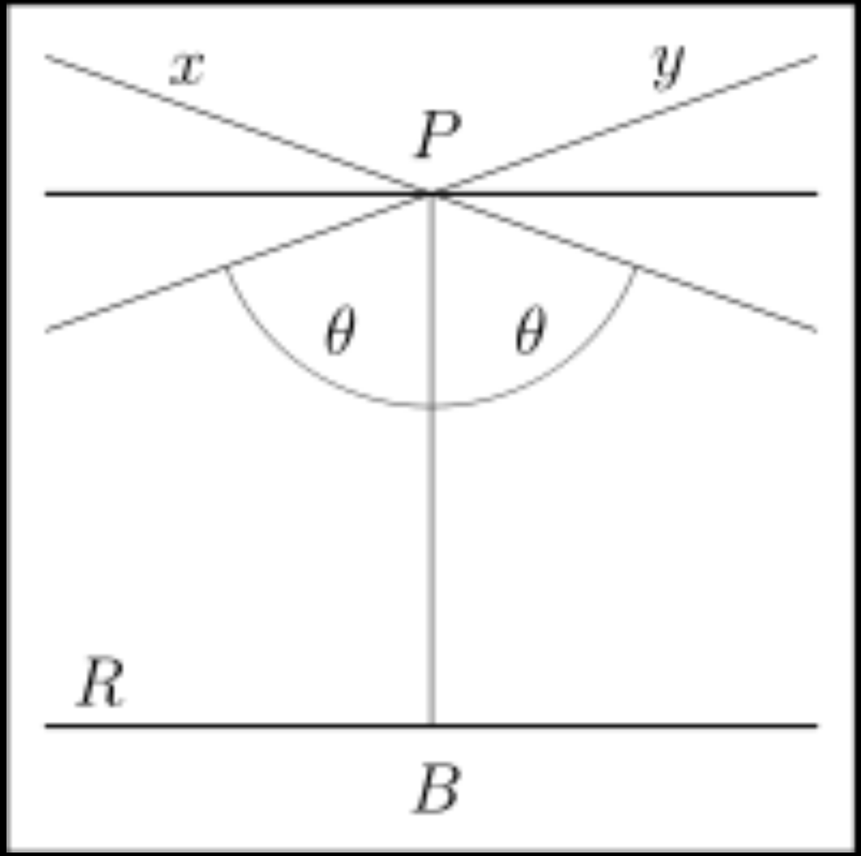
2. Curvo, <u>finito</u> (fechado/elíptico)

3. Curvo, infinito (aberto/hiperbólico)

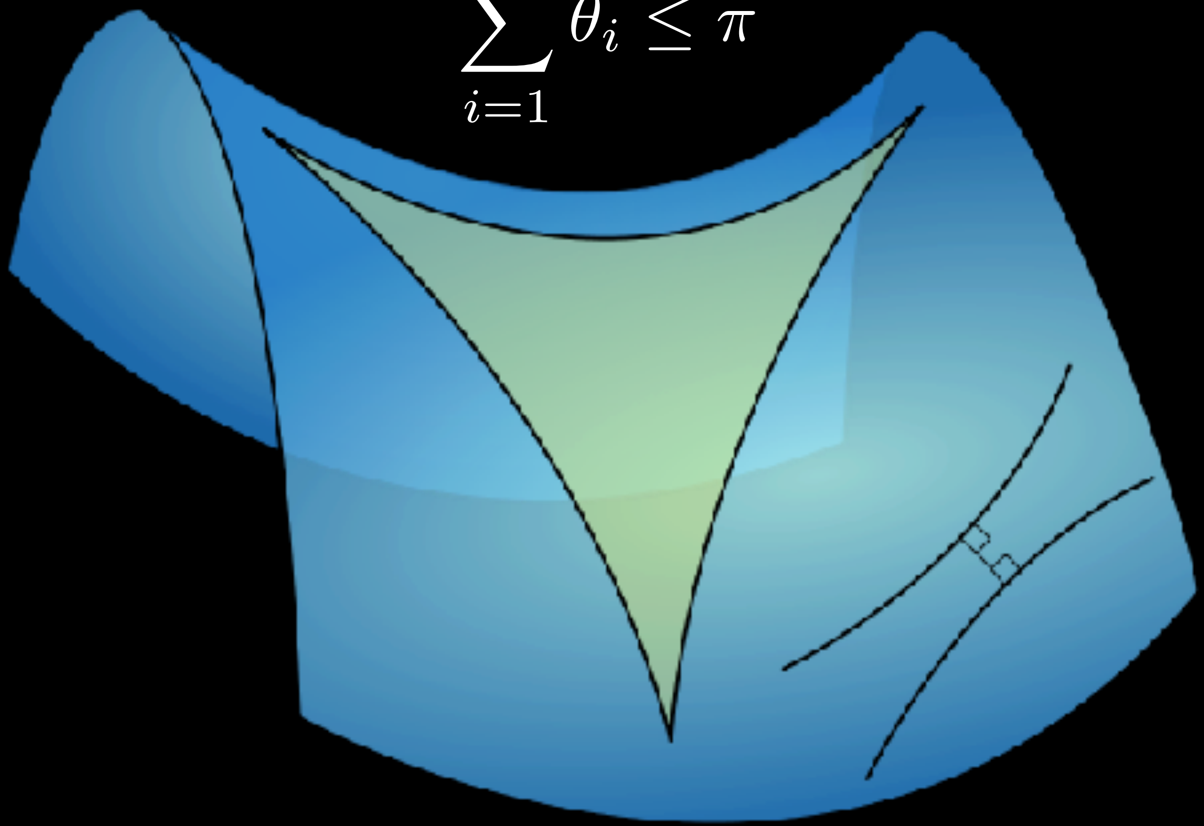
Geometria **hiperbólica** (ou Geometria de Bolyai-Lobachevsky)

Teorema ultraparalelo:

dadas duas linhas paralelas (hipérboles), há uma única linha perpendicular a elas.



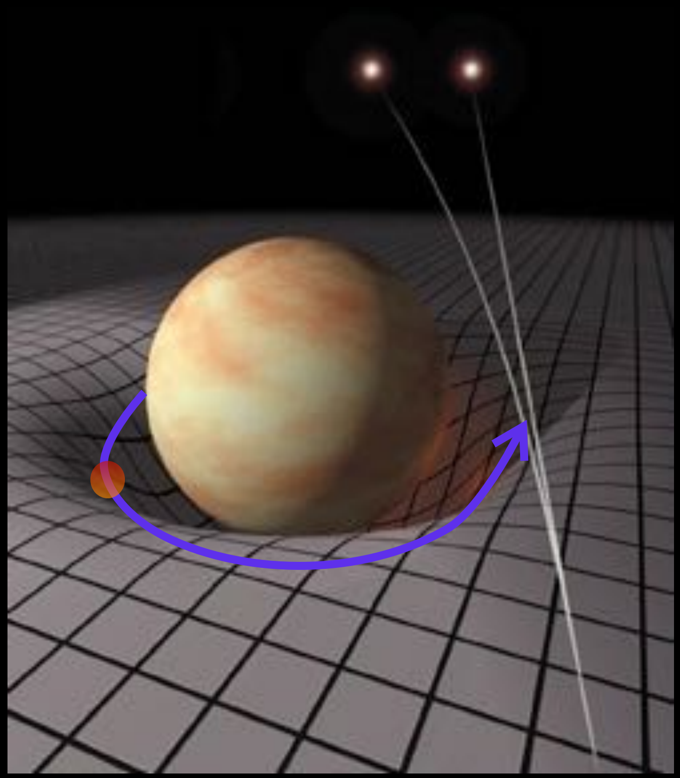
$$\sum_{i=1}^{3} \theta_i \leq \pi$$



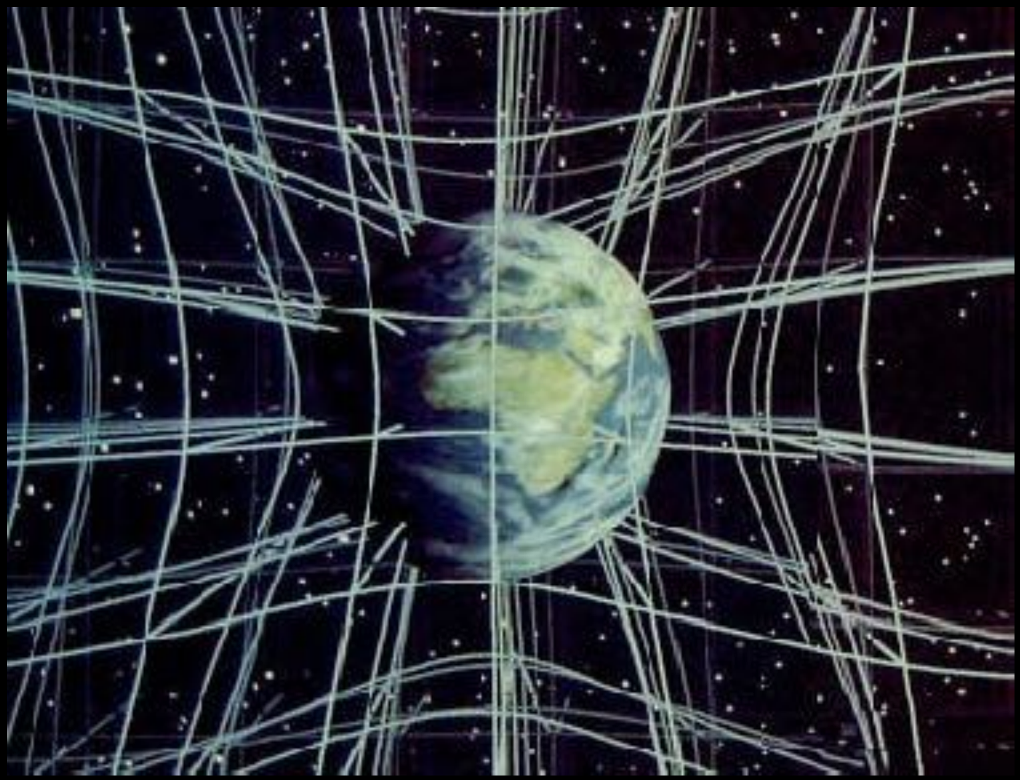
Nas teorias "covariantes" da gravidade (p. ex., a Relatividade Geral), a **gravidade** é uma manifestação da **curvatura do espaço-tempo**

Nessas teorias, a **métrica** do espaço-tempo (i.e., sua **geometria**) tem dois papéis:

ela **determina** a trajetória da matéria...

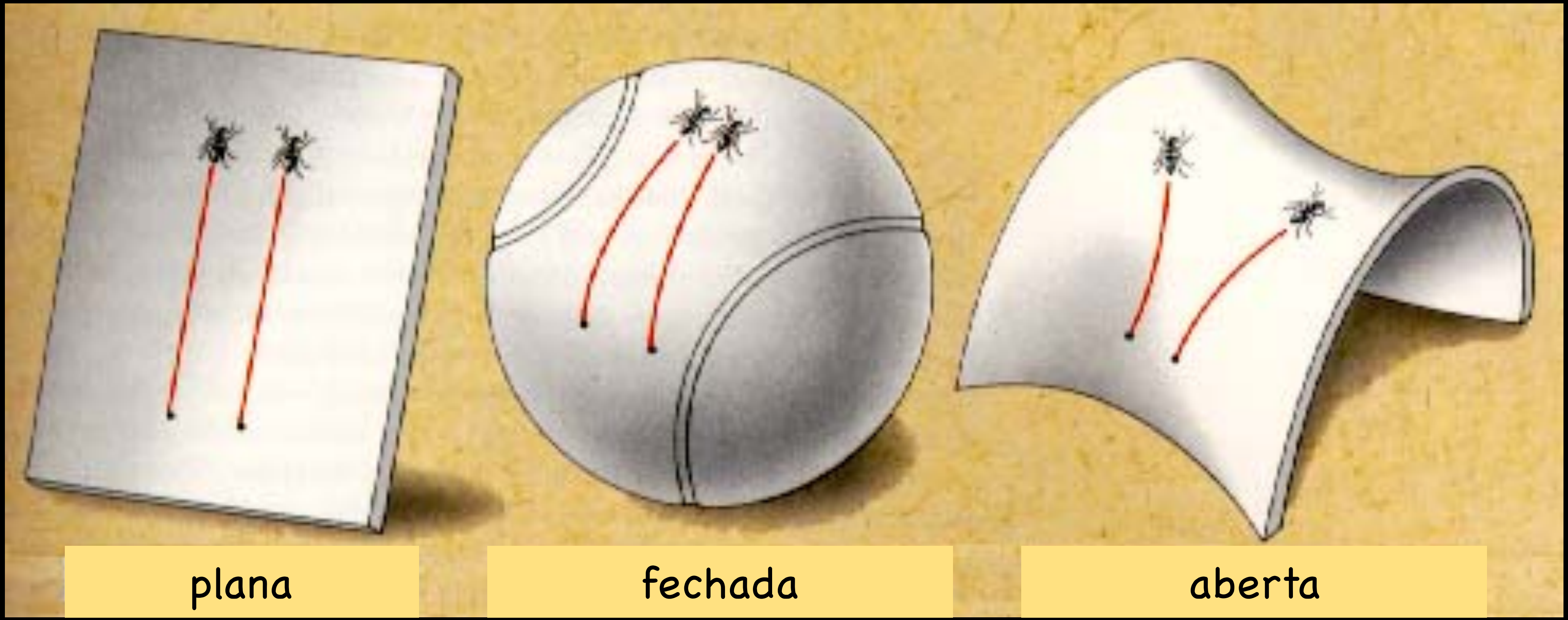


...e é **curvada** pela matéria

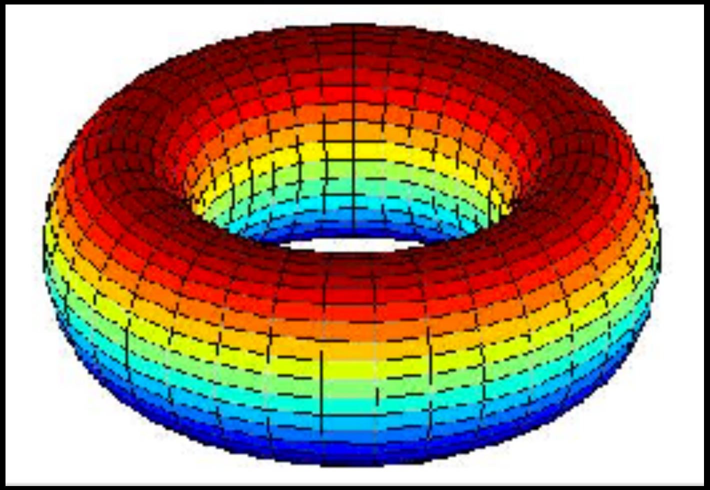


- O que significa uma "geometria" do espaço-tempo?
- O que determina essa geometria?
- Como podemos fazer medidas que testam essa teoria?

Visão "global" das geometrias **plana** (**curvatura nula**), **fechada** (**curvatura positiva**) e **aberta** (**curvatura negativa**):



Um aspecto crucial dessas geometrias é que **todos** os **pontos** desses espaços são **equivalentes**. Ou seja, não há **nenhuma posição privilegiada**, nem **nenhuma direção privilegiada**. Isso não é necessariamente verdade em outras geometrias, p. ex.:



Espaços **planos** (Euclideanos), **fechados** (i.e., esféricos) e **abertos** (GLB) são as **únicas variedades** que satisfazem um princípio simples: elas são **homogêneas** e **isotrópicas**.

Homogeneidade: o espaço tem as mesmas propriedades em todo lugar

Homogeneidade sem isotropia

Isotropia: todas as direções do espaço são equivalentes

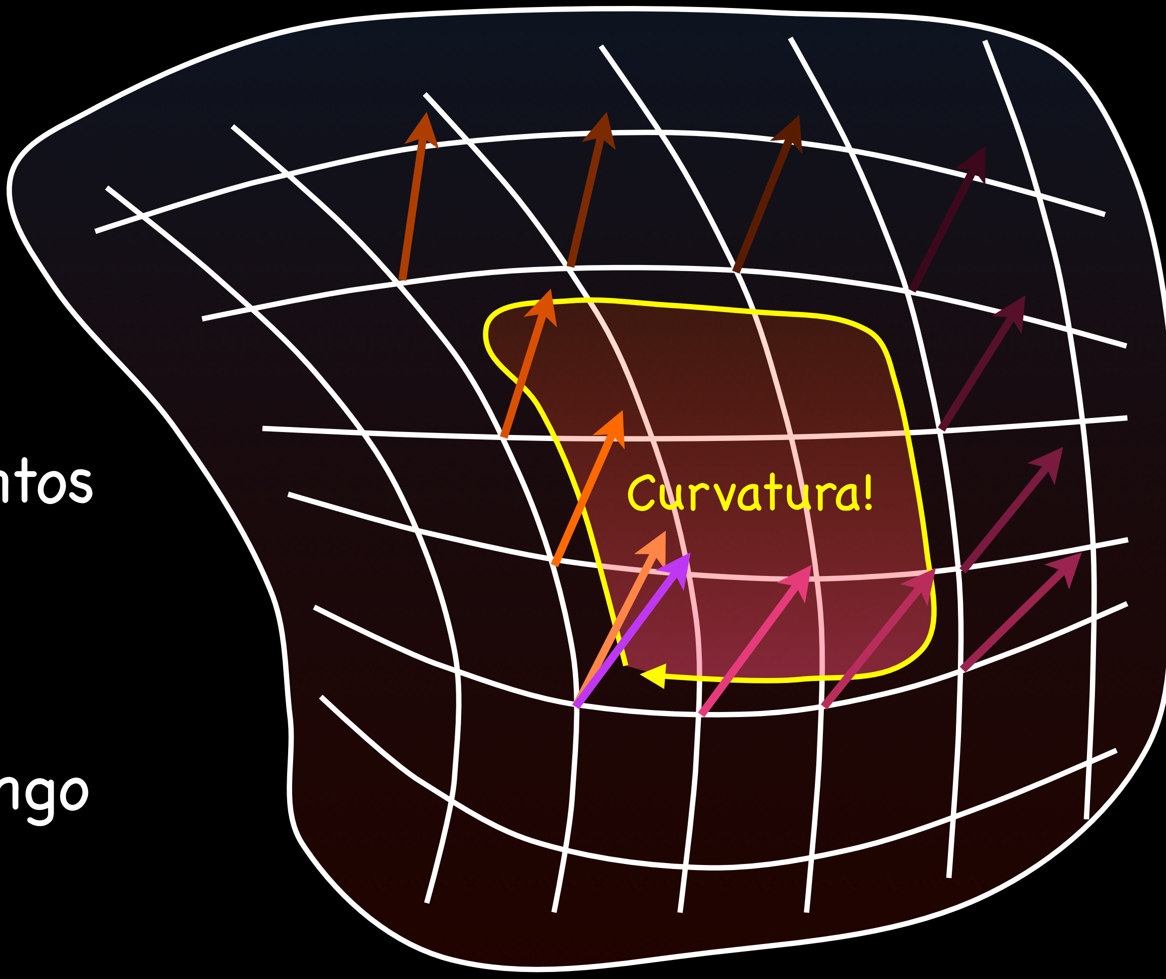
Isotropia sem homogeneidade

Princípio cosmológico: o espaço é o mesmo em todo lugar, e em todas as direções

O espaço de Lobachevski foi uma das motivações para **Georg B. Riemann**, em 1854, propor sua visão global da **Geometria como o estudo das variedades com qualquer número de dimensões, em qualquer tipo de espaço**.

Essas geometrias são **essencialmente não-Euclideanas**: as **distâncias** entre dois pontos são dadas em termos de uma **métrica**, que é uma **função diferenciável qualquer**:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$



A métrica tem um **papel dual**:

i) ela serve para **medir a distância** entre dois pontos quaisquer; e

ii) ela determina (pelas **conexões afins**) como se deve **transportar quantidades geométricas** ao longo de um caminho suave na variedade - p. ex.:

aceleração

$$\frac{d V_\mu}{d\lambda} = \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \frac{d x^\nu}{d\lambda} V_\alpha$$

$$\Delta V_\mu = \frac{1}{2} R^\alpha_{\beta\mu\nu} V_\alpha \oint dx^\mu x^\nu$$

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial\, g_{\beta\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial\, g_{\beta\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial\, g_{\mu\nu}}{\partial x^{\beta}}\right)$$

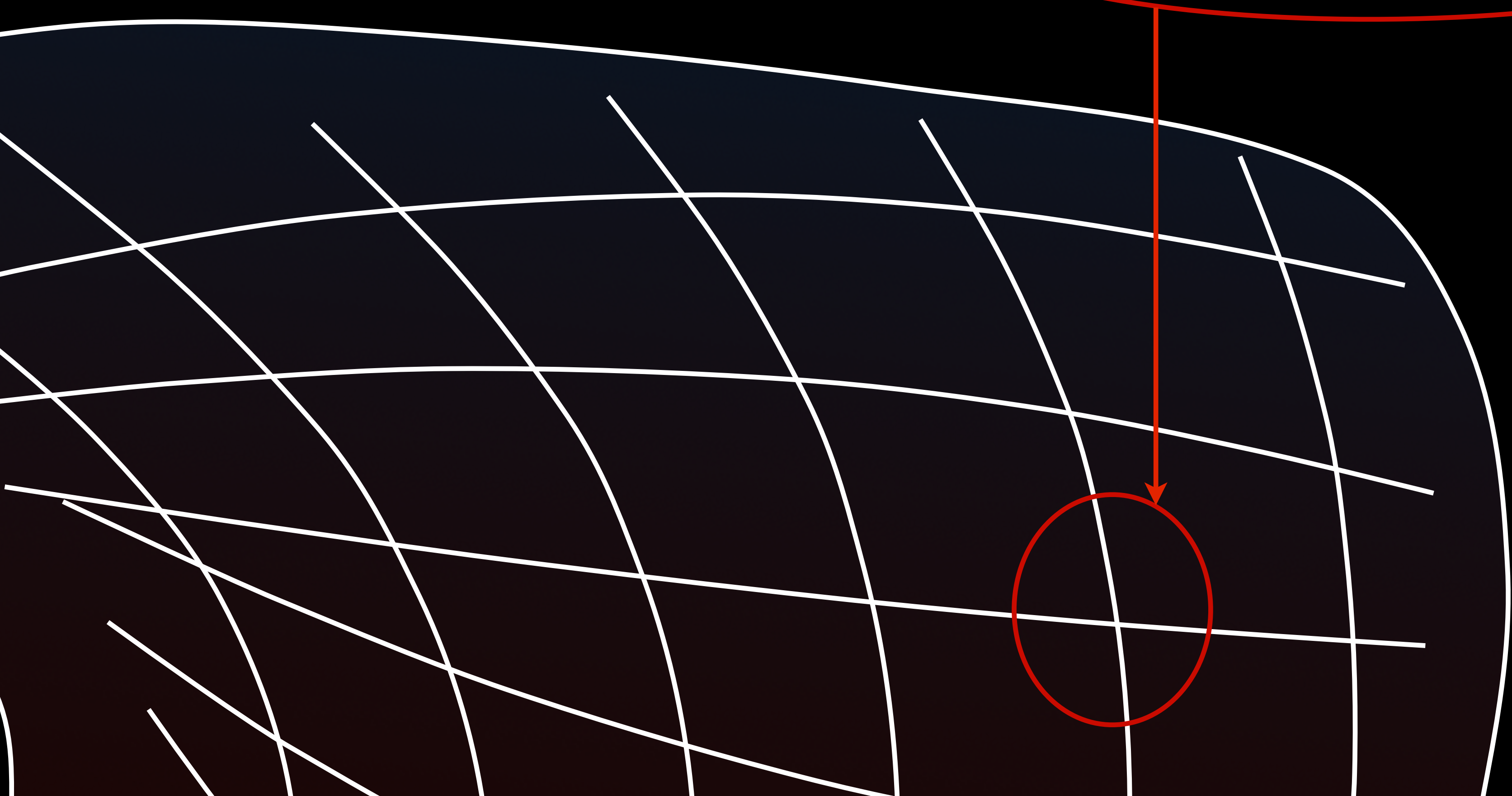
$$\frac{D\,V^{\alpha}}{D\,x^{\beta}} = V^{\alpha}_{\;;\beta} = \frac{\partial\, V^{\alpha}}{\partial\, x^{\beta}} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} V^{\mu}$$

$$R^{\alpha}_{\;\beta\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\beta\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\mu}\Gamma^{\sigma}_{\beta\nu}$$

$$\frac{D\,V_{\alpha}}{D\,x^{\beta}} = V_{\alpha\,;\,\beta} = \frac{\partial\, V_{\alpha}}{\partial\, x^{\beta}} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} V_{\mu}$$

A **liberdade de escolha das coordenadas** implica que, em qualquer ponto, podemos sempre usar o **Elevador de Einstein,** ir para um sistema no qual é métrica é, **localmente, aquela de Minkowski**, e assim fazer com que as **conexões se anulem**:

$$g_{\mu\nu} \to \eta_{\mu\nu} \;\; , \;\; \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} \to 0$$



Entretanto, se o espaço é **curvo**, as **derivadas** das conexões não podem também se anular...

$$\partial_{\beta}\, \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} \neq 0 \quad !$$

Portanto, nunca podemos "anular" a curvatura!

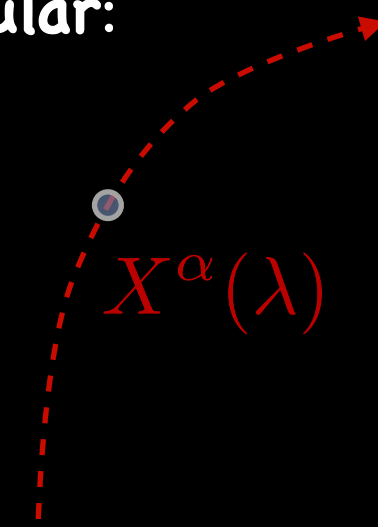
Agora, suponha que nos é dado um espaço com uma determinada métrica.

O que define um referencial em "queda livre" (inercial) em algum lugar desse espaço?

➟ A **aceleração** em trajetórias que passam por aquele lugar deve **se anular**:

$$\frac{D^2 X^\alpha}{D\lambda^2} = 0 \quad \Rightarrow \frac{d^2 X^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{d X^\mu}{d\lambda}\frac{d X^\nu}{d\lambda} = 0$$

Equação da geodésica



Note que a equação da geodésica determina tanto as coordenadas **espaciais e temporais** do observador inercial

➟ "Tempo próprio" é o $X^0 = \tau$ ao longo da geodésica!

<u>**Limite Newtoniano**</u>

Pequenas velocidades...

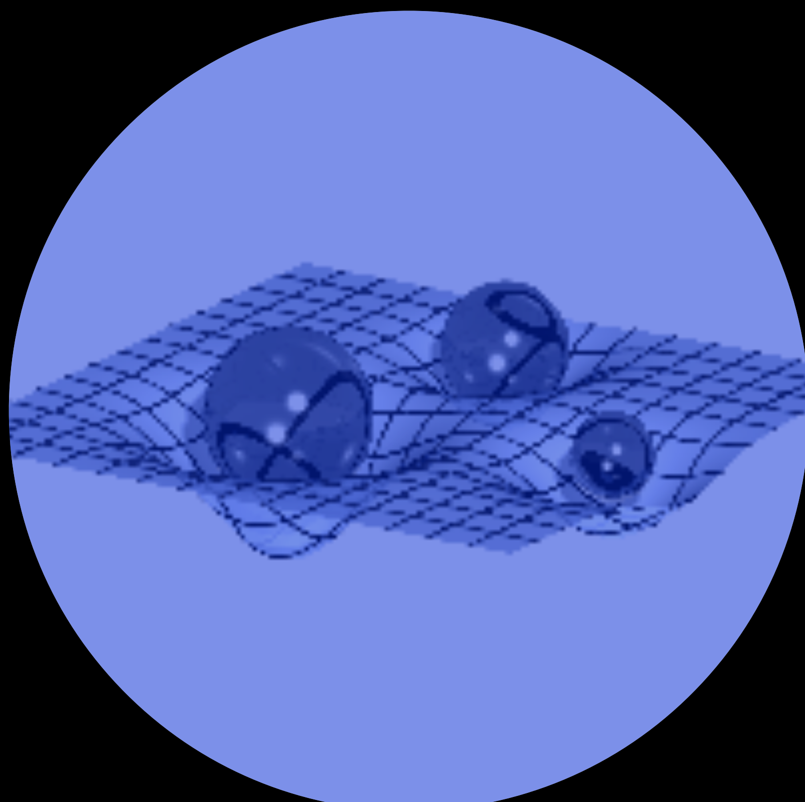
$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} \approx \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{00}\frac{dt}{d\tau}\frac{dt}{d\tau} = 0$$

$g_{00} = 1 - 2\phi$

Métrica estática, quase Minkowski...

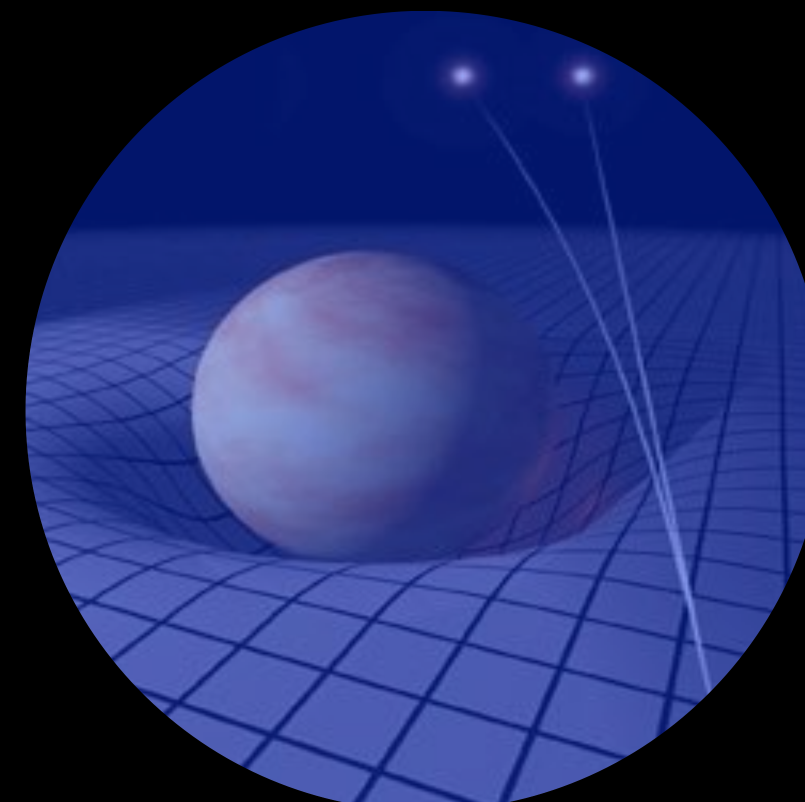
$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} \to \Gamma^i_{00} = -\frac{1}{2}\nabla^i g_{00} \quad \Rightarrow \begin{cases} \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\nabla^i g_{00}\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2 \\ \frac{d^2 x^0}{d\tau^2} = 0 \end{cases}$$

Equações de Einstein



A matéria curva o espaço,
determinando a métrica...

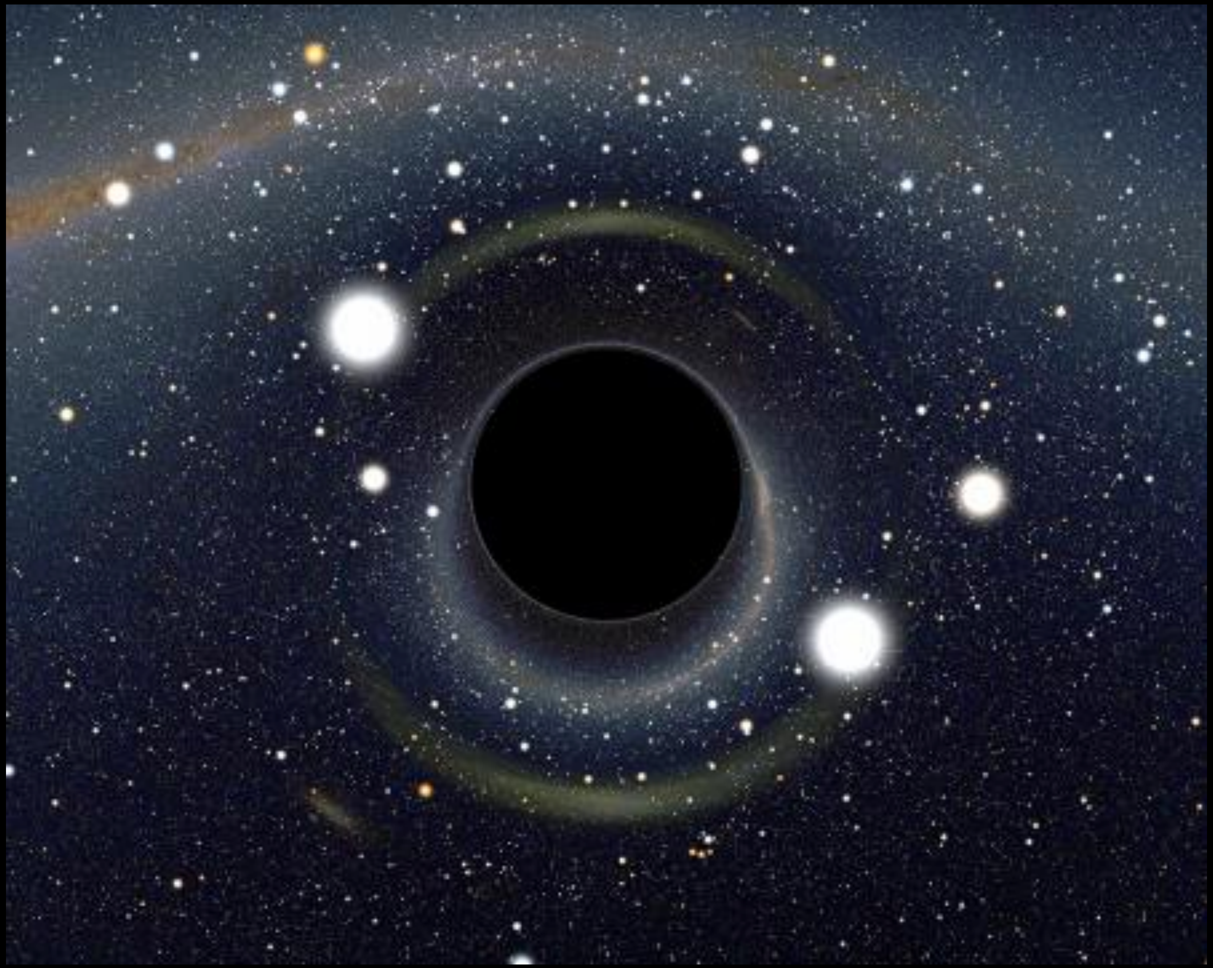
... e a métrica determina a
cinemática da matéria...



Matéria e métrica determinam em conjunto a **dinâmica**

$$G_{\mu\nu}(metrica) \;=\; 8\,\pi\,G\,T_{\mu\nu}(materia)$$

Buracos negros



Leitura adicional sugerida (divulgação científica):

Kip S. Thorne, "Black holes and time warps: Einstein's outrageous legacy"

Isaac Asimov, "O colapso do universo"

Buracos negros

Segundo Newton, a aceleração da gravidade da Terra é: $g_1 = \frac{GM}{r_1^2} \simeq 10\ m/s^2$

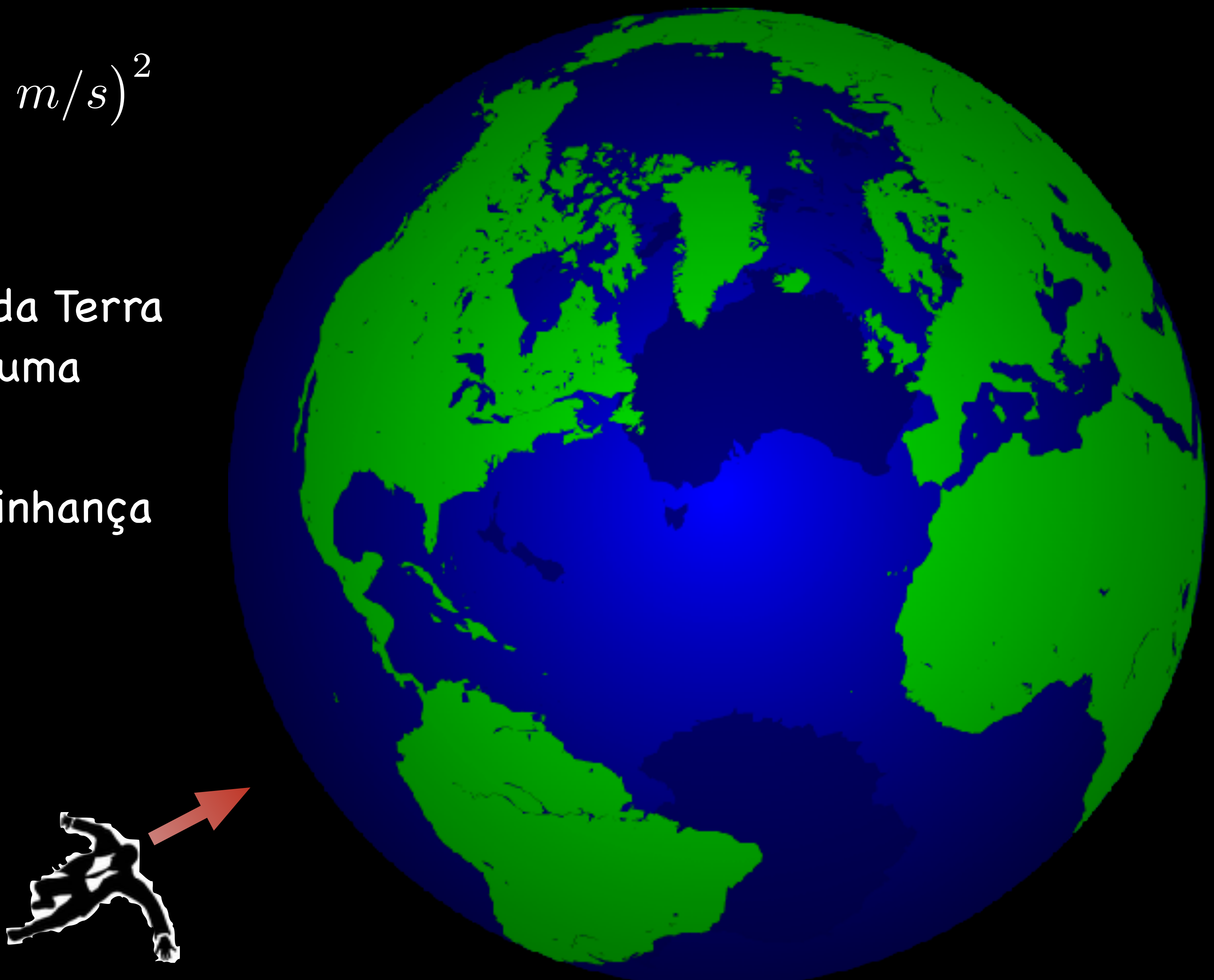
É mais interessante calcular o potencial:

$$\phi_1 = \frac{GM}{r_1} \simeq \left(8,2 \times 10^3\ m/s\right)^2$$

Agora imagine que toda a massa da Terra fosse compactada no tamanho de uma bolinha de gude.

Aí o potencial gravitacional na vizinhança da bolinha seria:

$$\phi_2 \simeq \left(2.8 \times 10^8\ m/s\right)^2$$



Buracos negros

Na Relatividade Geral, uma massa M "pontual" gera uma **métrica** do espaço-tempo conhecida como **Métrica de Schwarzschild** (1916):

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r\,c^2}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r\,c^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

c=1 (unidades "naturais")

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

O que acontece quando temos uma grande massa concentrada em um volume muito pequeno, menor que o **Raio de Schwarzschild**?

$$\boxed{R_s = \frac{2\,G\,M}{c^2} \to 2\,G\,M}$$

Vamos primeiro examinar o que acontece com o **cone de luz futuro** no espaço-tempo de Schwarzschild.

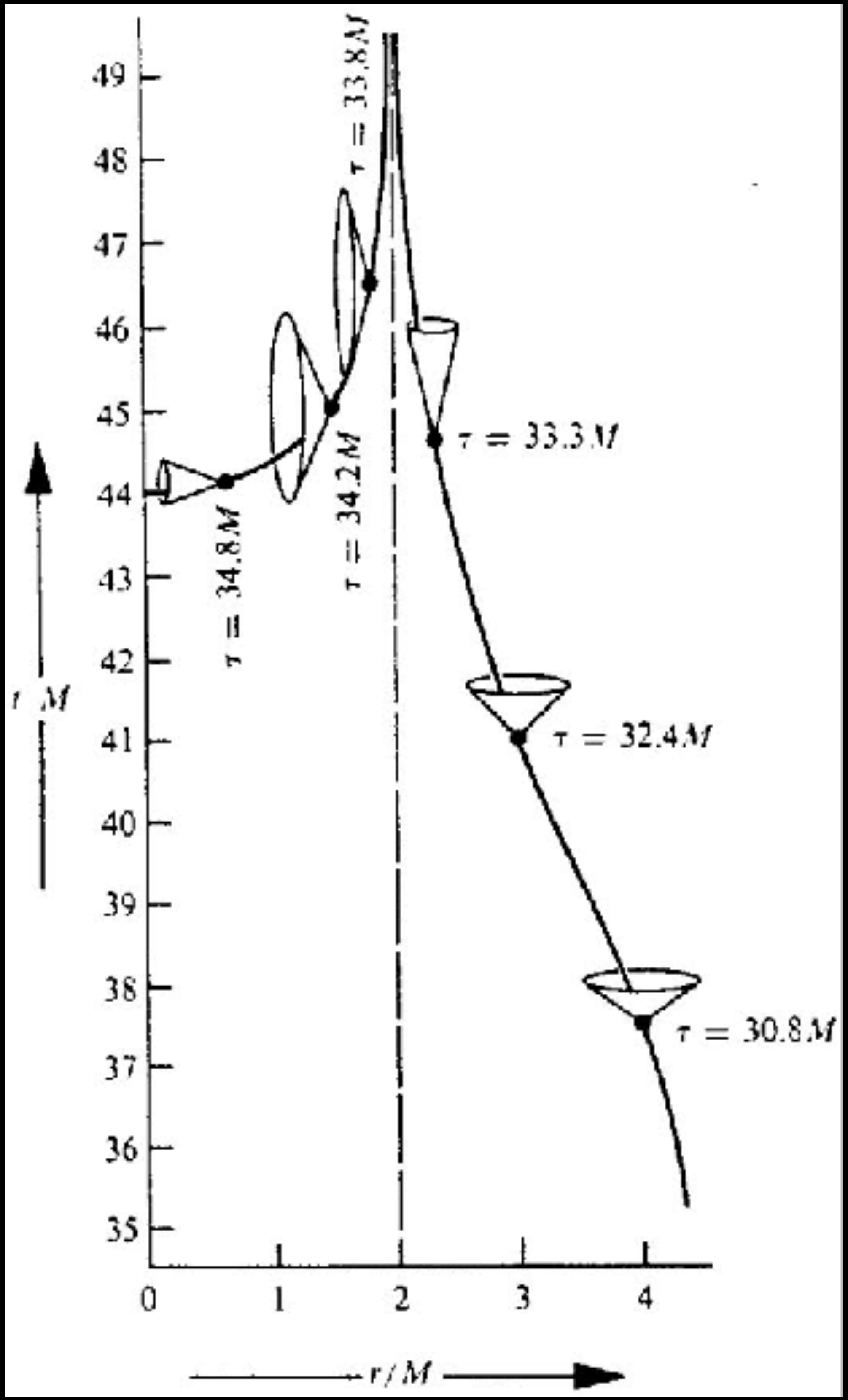
Fora do Raio de Schwarzschild, temos a situação usual: o cone de luz futuro aponta para… o futuro! (Ou seja, na direção de t crescendo.)

Porém, **dentro** do Raio de Schwarzschild o cone de luz futuro aponta na direção radial! Ou seja, o futuro de qualquer partícula, de qualquer corpo material, não importa as suas "particularidades", aponta para o ponto r=0 (onde está a massa M).

Em outras palavras: uma vez dentro do buraco negro, não há saída — nem para a luz!

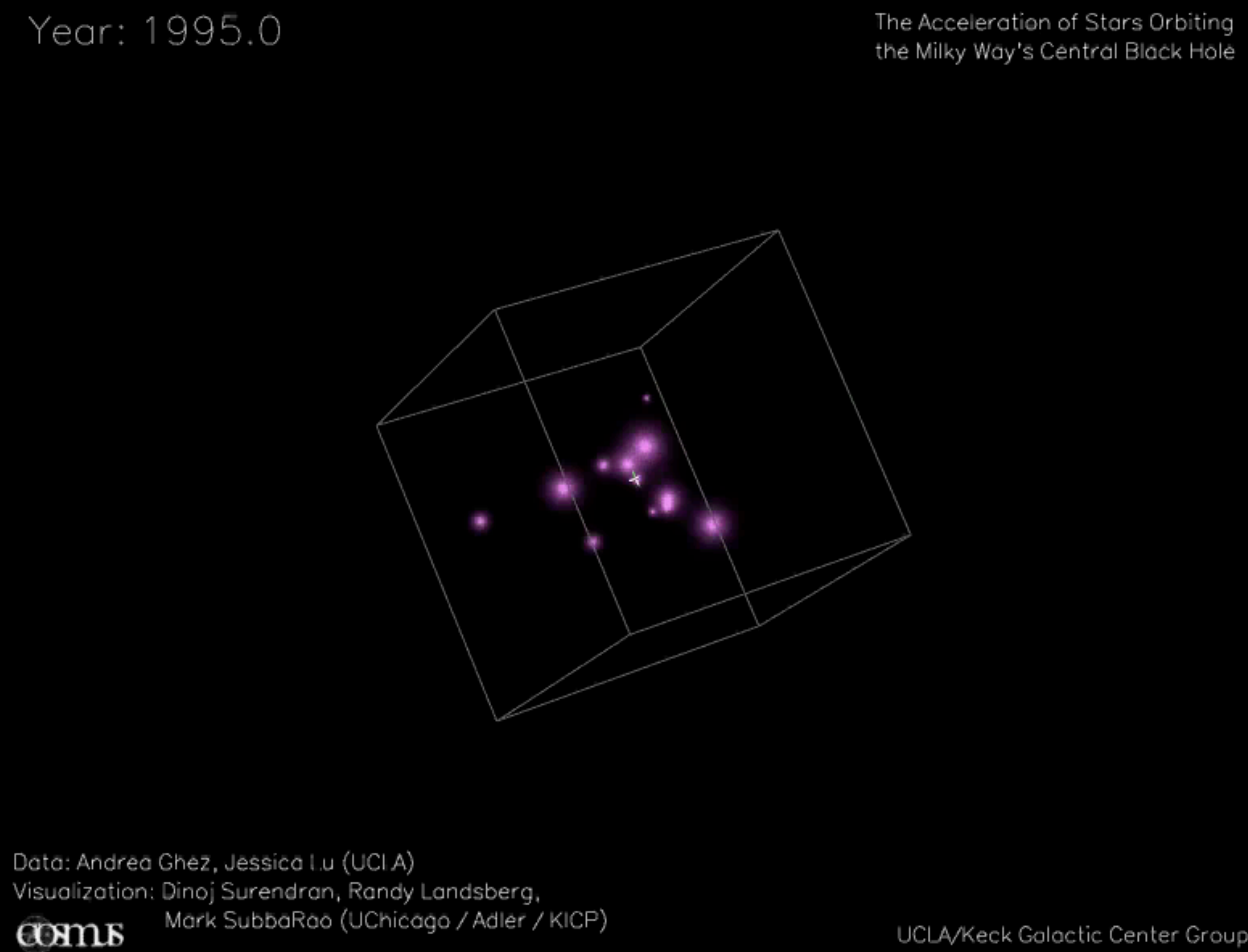
No ponto r=0 a curvatura do espaço-tempo é infinita, e temos o que é conhecido como **singularidade**.

Linhas de mundo de trajetórias radiais

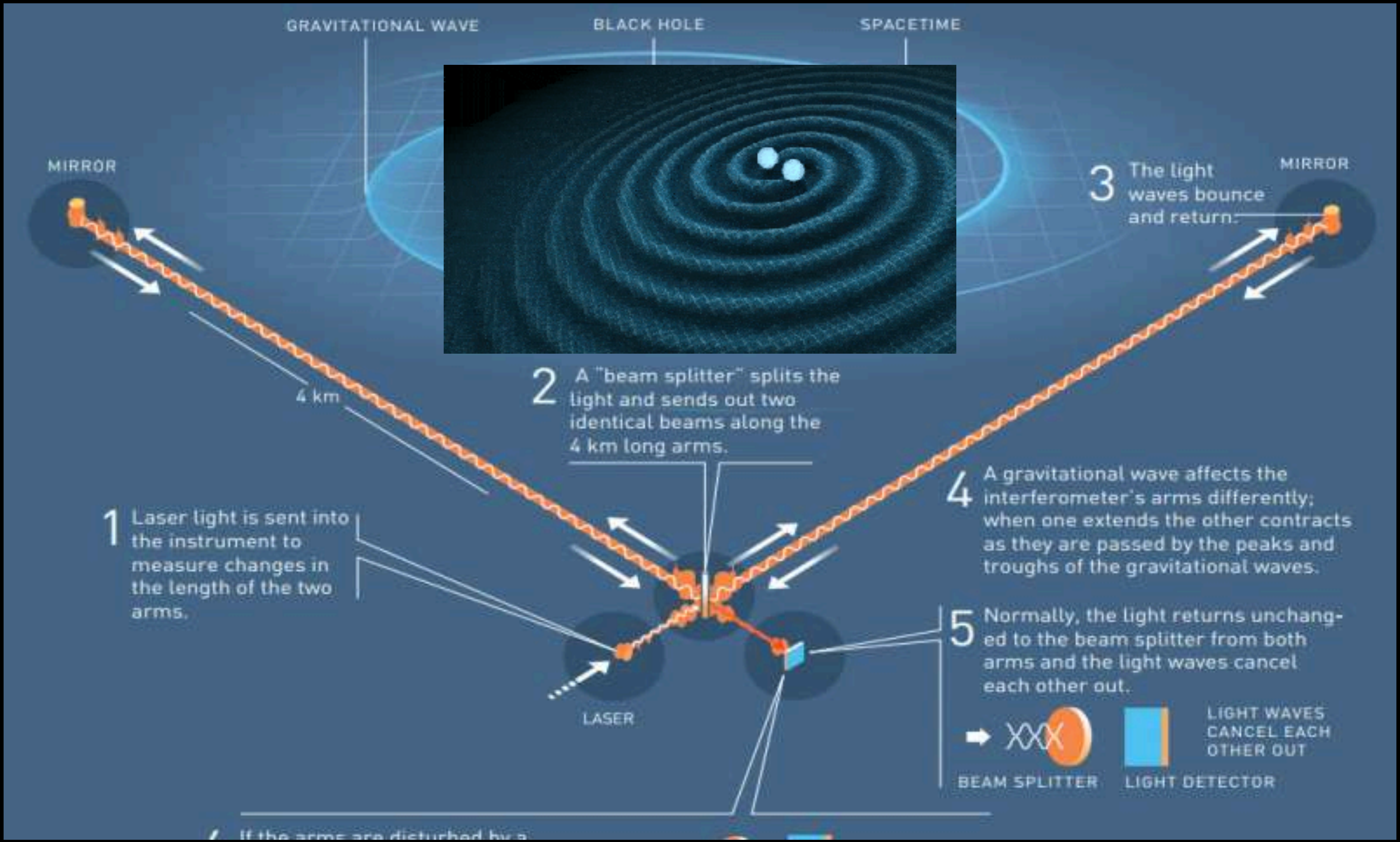


Buracos negros existem - e eles estão mais próximos do que você imagina!!!

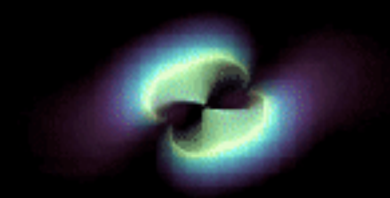
$$M \simeq 4.1 \times 10^6 M_\odot$$

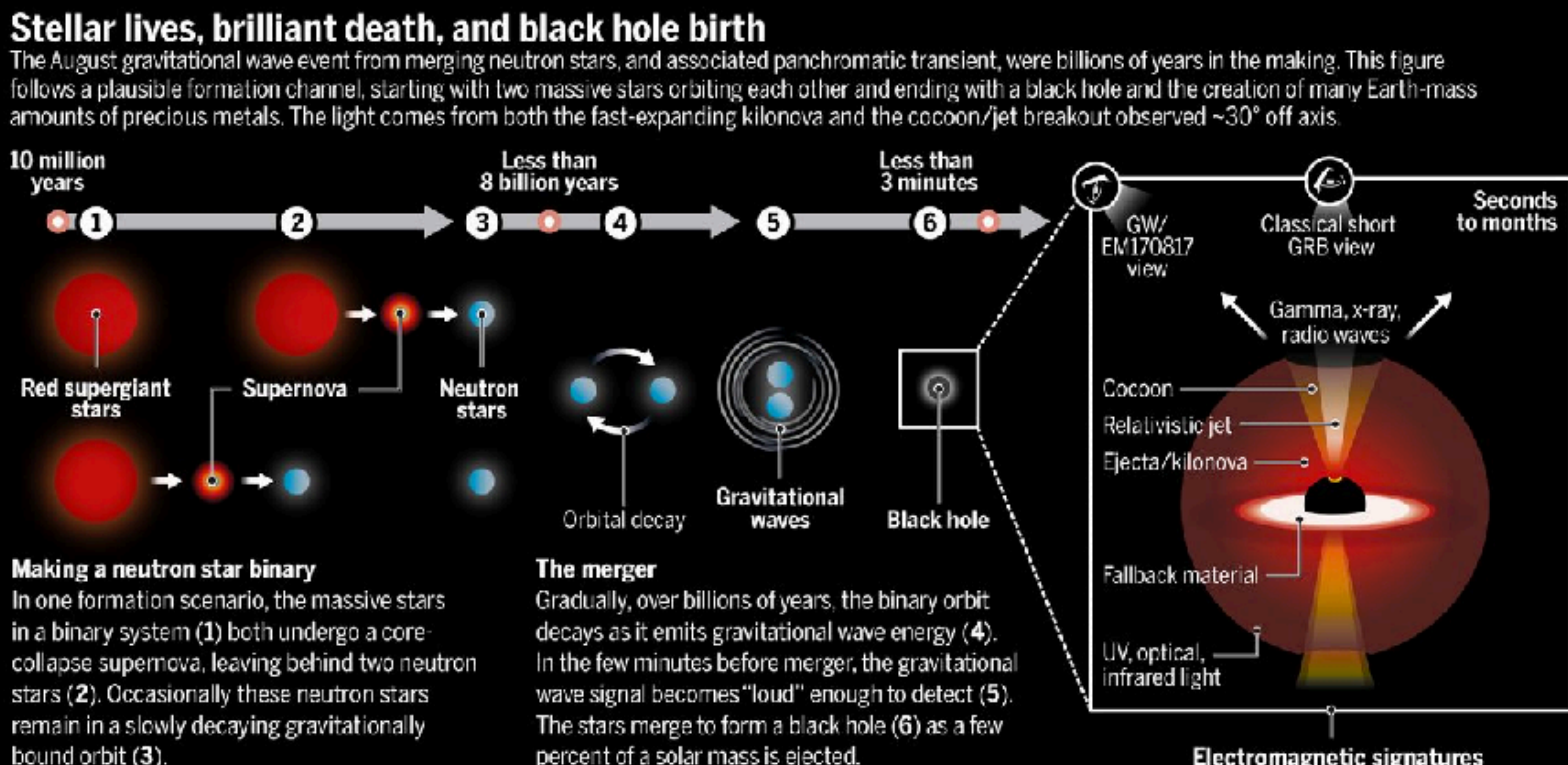


Buracos negros emitem sinais

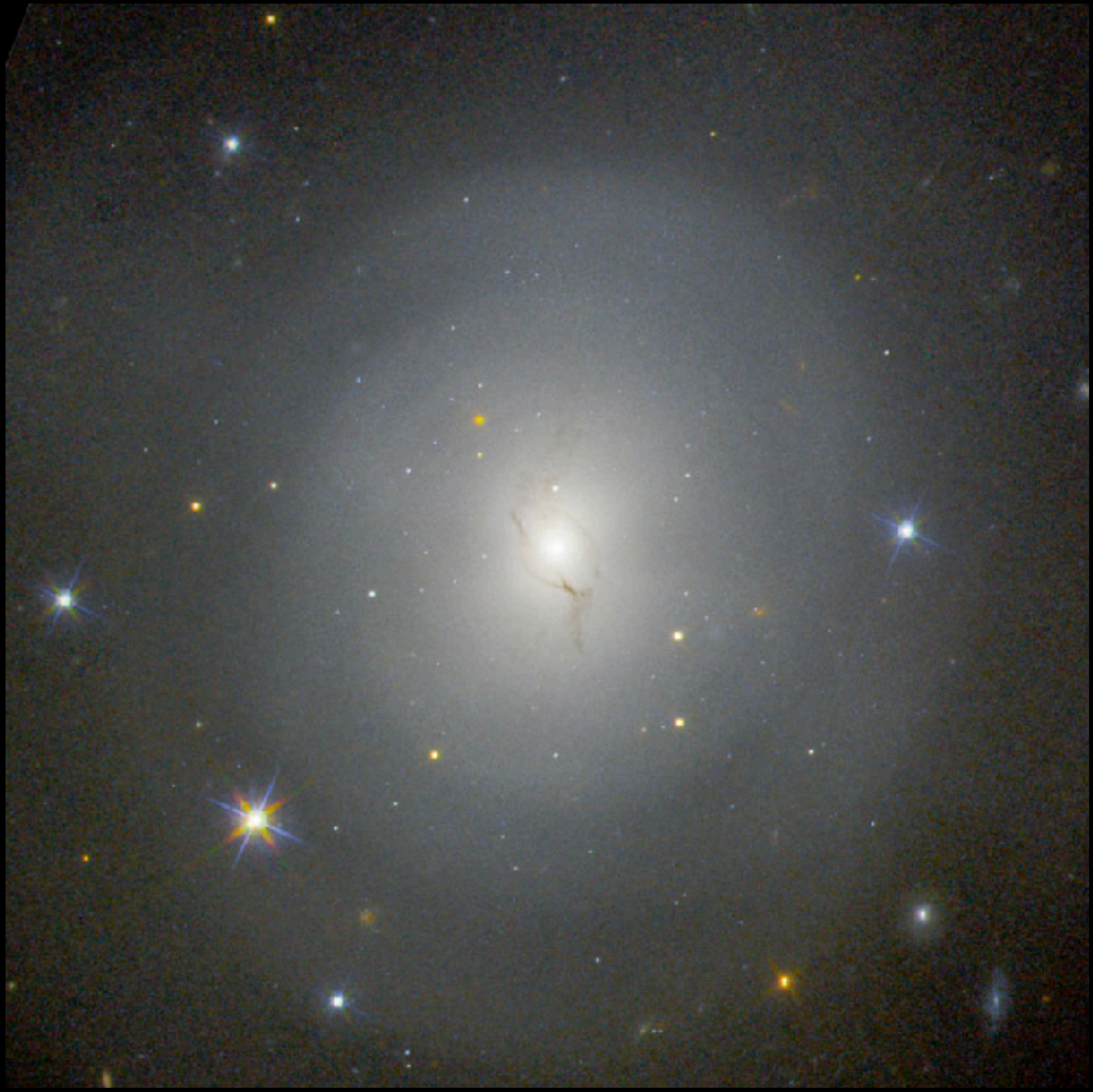


Quase-buracos negros: estrelas de nêutrons

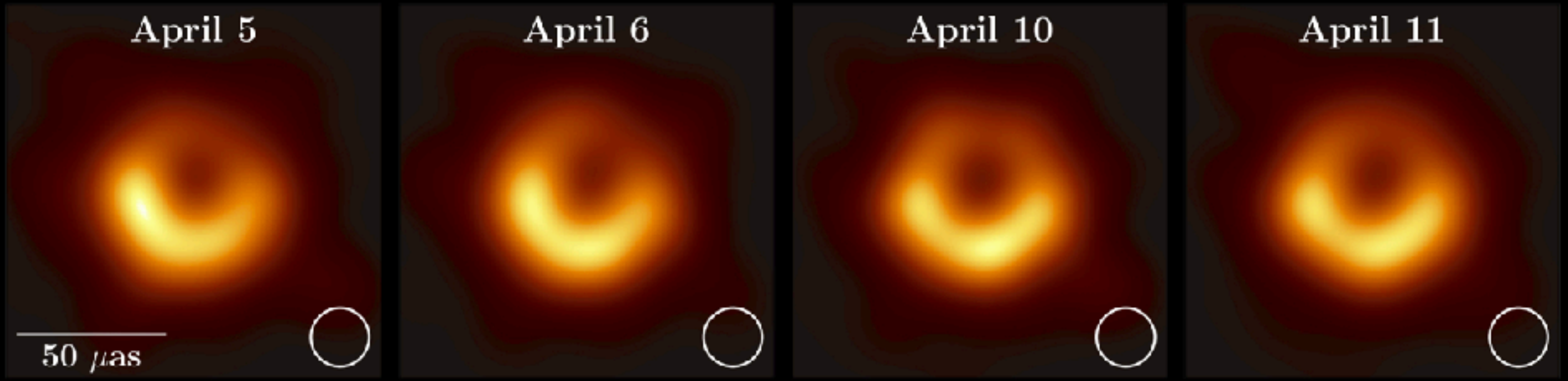


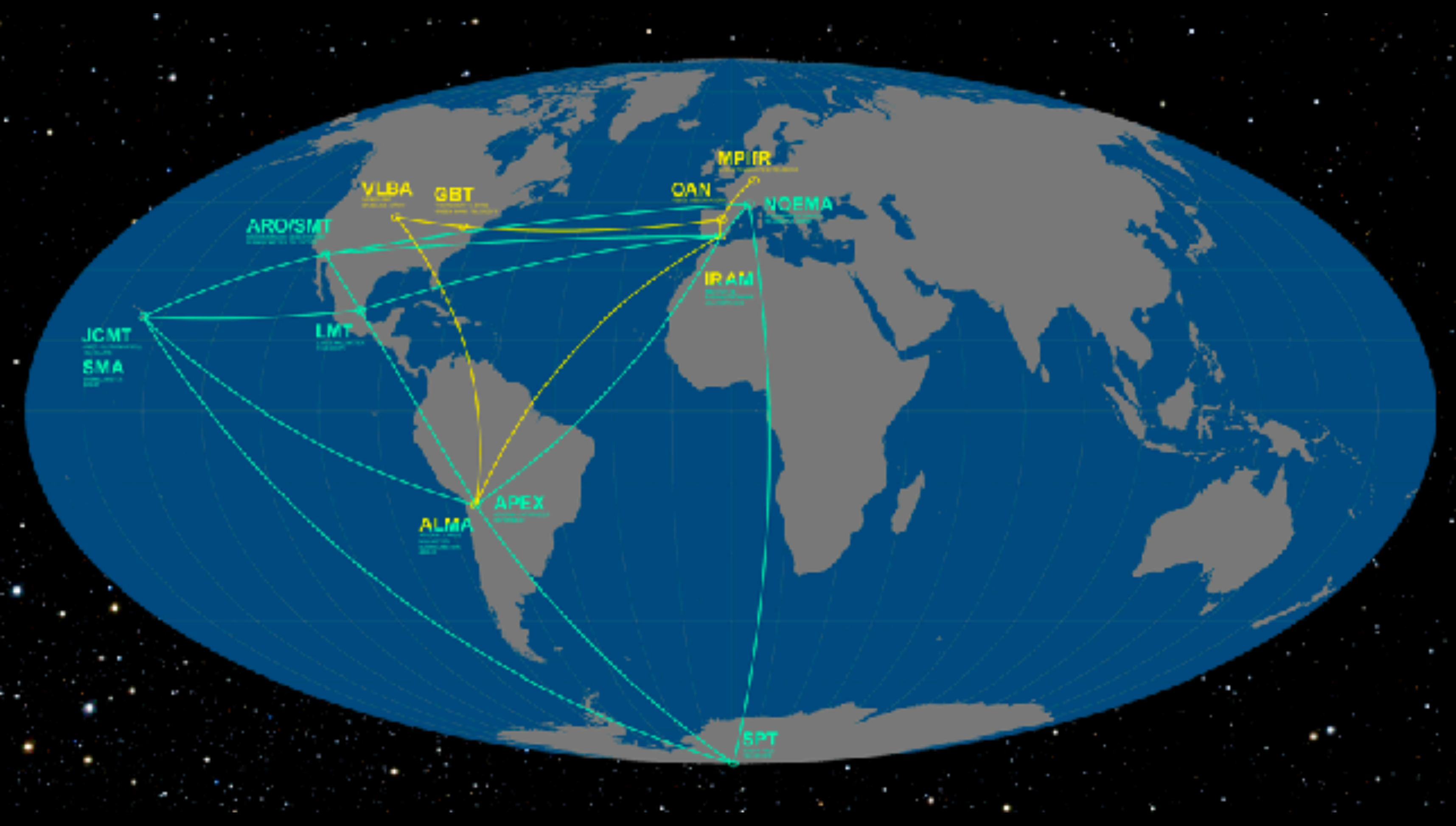


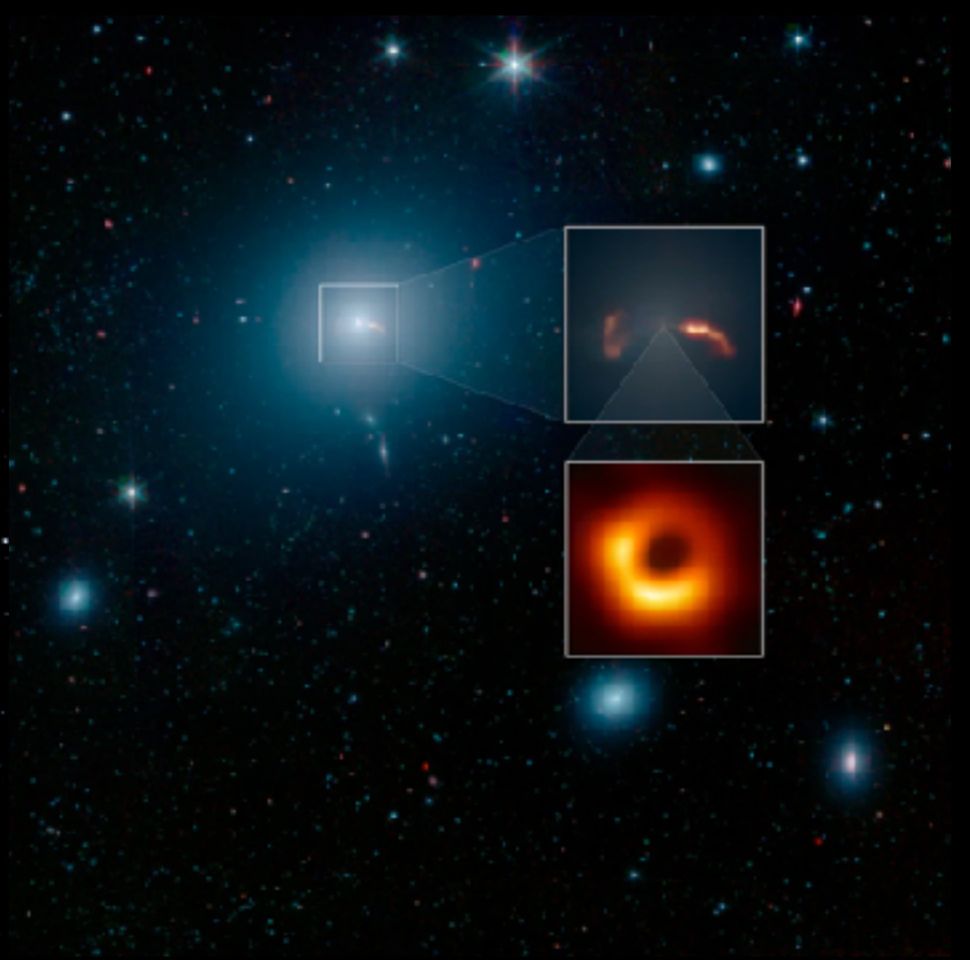
Buracos negros emitem sinais



E finalmente, uma foto de um buraco negro!!!







Fim