

Nome:

Número USP:

Provinha XIII

Apesar de seu enorme sucesso, a teoria da gravitação de Newton com potencial $V \propto -\frac{1}{r}$ falha ao tentar explicar fenômenos orbitais do Sistema Solar, como a precessão do periélio de Mercúrio. Mesmo quando esse problema em particular é resolvido por métodos de cálculo perturbativos, considerando o efeito gravitacional dos vários corpos do sistema, outras questões, como o deslocamento do perigeu lunar, ficaram mal resolvidas até o aparecimento da teoria da relatividade geral.

A energia potencial gravitacional na teoria de Einstein pode ser representada com boa aproximação (para campos fracos) pelo chamado *potencial de Manev*, dado por:

$$V_M(r) = -\frac{mMG}{r} \left(1 + \gamma \frac{MG}{c^2 r} \right),$$

em que M é a massa do Sol e m a do planeta, G a constante de Newton, c é a velocidade da luz, e γ um número adimensional tal que o termo $-\gamma \frac{mM^2 G^2}{c^2 r^2}$ represente a correção relativística (a qual pode depender da configuração de massa da estrela).

- (a) Dado uma energia potencial de força central V , escreva o potencial efetivo V_{ef} correspondente para um corpo com momento angular L .
- (b) Escreva as condições sobre V_{ef} para que esse potencial admita órbitas estáveis.
- (c) Considere uma teoria com potencial atrativo do tipo $V = -\frac{K}{r^n}$. Mostre que somente para $n < 2$ essa teoria pode admitir órbitas estáveis para quaisquer valores de L (a depender do sinal de K , é claro).

Para os itens seguintes, você precisará calcular o período de oscilação radial de uma órbita newtoniana.

- (d) Calcule aproximadamente o período de oscilação T_r do raio de uma órbita newtoniana.
- (e) Supondo que a média ao longo da órbita do inverso do quadrado do raio seja, aproximadamente:

$$\frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{r(t)^2} dt = \frac{1}{r_0^2},$$

em que r_0 é o raio da órbita circular, calcule o momento angular L dessa órbita em função de r_0 e do período de translação T_O .

-
- (f) Escreva, em função dos períodos orbital T_O e radial T_r , o que significa uma órbita apresentar ou não precessão.
- (g) Mostre que, com essas aproximações, uma órbita newtoniana com potencial $V \propto -\frac{1}{r}$ não pode apresentar precessão.
- (h) Sendo T_r^M o período de oscilação radial de uma órbita para o potencial de Manev com momento angular L , e T_r o período para a órbita newtoniana de mesmo momento angular, mostre que:

$$\frac{T_r^M}{T_r} \approx 1 - 3\gamma \left(\frac{mMG}{cL} \right)^2.$$

- (i) Suponha que o período orbital e o raio de órbita circular para os potenciais de Manev e de Newton sejam aproximadamente iguais. Justifique por que é esperada uma precessão mais acentuada para as órbitas mais internas do Sistema Solar.

Dica: lembre-se da terceira lei de Kepler: os quadrados dos períodos de translação são proporcionais aos cubos dos raios de órbita.