Lista de Exercícios V

❶ Uma experiência divertida consiste em mudar a tonalidade da voz enchendo a boca de gás hélio: uma voz grave transforma-se em aguda. Para explicar o efeito, admita que os comprimentos de onda associados à voz são determinados pelas dimensões das cordas vocais, laringe e boca, estas funcionando como cavidades ressonantes, de modo que a variação da tonalidade seria devida unicamente à variação da velocidade do som. **Observação:** Isso deve ser feito com cuidado!

(a) Calcule a velocidade do som no hélio a 20°C. É um gás monoatômico de massa atômica ≈ 4 g/mol, com $\gamma \approx 1,66$. A constante universal dos gases R vale 8,314 J/K·mol.

(b) Explique o efeito, calculando a razão entre as frequências do som no hélio e no ar para o mesmo comprimento de onda.

❷ Um alto-falante de um aparelho de som emite 1 W de potência sonora na frequência $\nu = 100$ Hz. Admitindo que o som se distribui uniformemente em todas as direções com velocidade de 341 m/s e que o ar tenha densidade de 1,3 kg/m^3, determine, num ponto situado a 2 m de distância do alto-falante:

(a) o nível sonoro em dB;

(b) a amplitude de pressão;

(c) a amplitude de deslocamento;

(d) a que distância do alto-falante o nível sonoro estaria 10 dB abaixo do calculado em (a) ?

❸ O *tubo de Kundt*, que costumava ser empregado para medir a velocidade do som em gases, é um tubo de vidro que contém o gás, fechado numa extremidade por uma tampa M que se faz vibrar com uma frequência ν conhecida (por exemplo, acoplando-a a um alto-falante) e na outra por um pistão que se faz deslizar, variando o comprimento do tubo. O tubo contém um pó fino (serragem, por exemplo). Ajusta-se o comprimento do tubo com o auxílio do pistão até que ele entre em ressonância com a frequência ν, o que se nota pelo reforço da intensidade sonora emitida. Observa-se então que o pó fica acumulado em montículos igualmente espaçados, de espaçamento Δl, que se pode medir.

(a) A que correspondem as posições dos topos dos montículos ?

(b) Qual é a relação entre Δl, ν e a velocidade do som no gás ?

(c) Com o tubo cheio de CO_2 a 20°C e $\nu = 880$ Hz, o espaçamen to médio é de 15,2 cm. Qual é a velocidade do som no CO_2 a 20°C ?

❹ A densidade média da crosta terrestre 10 km abaixo dos continentes é 2,7 g/cm^3. A velocidade das ondas sísmicas longitudinais a esta distância, encontrada medindo o tempo de chegada de terremotos distantes, é 5,4 km/s. Use esta informação para encontrar o módulo de elasticidade volumétrico, B, da crosta terrestre a esta profundidade. Para comparação $B_{\text{aço}} = 16 \times 10^{10}$ Pa.

❺ Terremotos geram ondas de som na Terra. Diferente de um gás, existem ondas transversais (S) e longitudinais (P) em um sólido. Tipicamente a velocidade de S é 4,5 km/s e de P é 8,0 km/s. Um sismógrafo registra ondas P e S de um terremoto. As primeiras ondas P chegam 3,0 minutos antes das primeiras ondas S. Assumindo que as ondas se deslocam em linha reta, a que distância ocorreu o terre

❻ Um submarino francês e um americano movem-se um no sentido do outro, em linha reta, em águas paradas no Atlântico Norte. O submarino francês se desloca a 50 km/h enquanto o americano a 70 km/h. Sabendo que ondas de sonar tem $v = 5470$ km/h e que o sonar do submarino francês emite um sinal de 1000 Hz, pergunta-se:

(a) Qual é a frequência do sinal detectado pelo submarino americano ?

(b) Qual é a frequência do sinal refletido pelo submarino americano, detectado pelo submarino francês ?

❼ Um avião a jato supersônico está voando a Mach 2 (o dobro da velocidade do som).

(a) Qual é o ângulo de abertura do cone de Mach?

(b) $2,5$ s depois do avião ter passado diretamente acima de uma casa, a onda de choque causada pela sua passagem atinge a casa, provocando um estrondo sônico. A velocidade do som no ar é de 340 m/s. Qual é a altitude do avião em relação à casa?

❽ Uma fonte sonora fixa emite som de frequência ν_0. O som é refletido por um objeto que se aproxima da fonte, onde interfere com as ondas que estão sendo emitidas, dando origem a batimentos com frequência $\Delta\nu$. Explique. Há inversão de fase na reflexão ? Por quê? Mostre que é possível determinar a magnitude $|u|$ da velocidade do objeto móvel em função de $\Delta\nu$, ν_0 e da velocidade do som v. O mesmo princípio é utilizado (com ondas eletromagnéticas em lugar de ondas sonoras) na deteção do excesso de velocidade nas estradas com auxílio do radar.

① **Ondas gravitacionais.** Ondas gravitacionais são oscilações na geometria do espaço-tempo que se propagam à velocidade da luz, e são previstas em todas as teorias modernas de gravitação – em particular, a teoria da Relatividade Geral de Einstein. Uma onda gravitacional pode ser visualizada como uma onda de deformações, que estica e comprime as coisas à medida que ela se propaga. A Fig. 1 mostra como uma onda gravitacional de comprimento λ e período T, se propagando na direção z, deformaria objetos (no caso círculos). Na parte superior vemos o padrão de deformação de vários objetos num determinado instante ($t = 0$), com a onda ora esticando as coisas na direção x e comprimindo na direção y, ora esticando na direção y e comprimindo na direção x. Na figura também mostramos como um objeto numa determinada posição ($z = 0$) é deformado numa e depois noutra direção, à medida que a onda passa por ele. Em 2015 o detector LIGO (Laser Interferometry Gravitational-wave Observatory) observou pela primeira vez essa assinatura de deformações que é gerada quando uma onda gravitacional passa pela Terra. Aquela detecção é consistente com a órbita e subsequente colisão de dois buracos negros com massa dezenas de vezes maiores que a massa do Sol. Na Fig. 2 mostramos um diagrama que representa os dois eixos do LIGO, ao longo dois quais medimos essas deformações. Você deve imaginar que esse detector está posicionado paralelo a um dos círculos da Fig. 1. Agora vamos examinar algumas das característica do sinal detectado pelo LIGO, respondendo as questões abaixo:

(a) Sabendo que a velocidade da luz no vácuo é $c = 300.000$ km/s, e que a frequência da onda gravitacional é da ordem de 100 Hz, estime o tamanho do sistema físico que emitiu essa onda gravitacional.

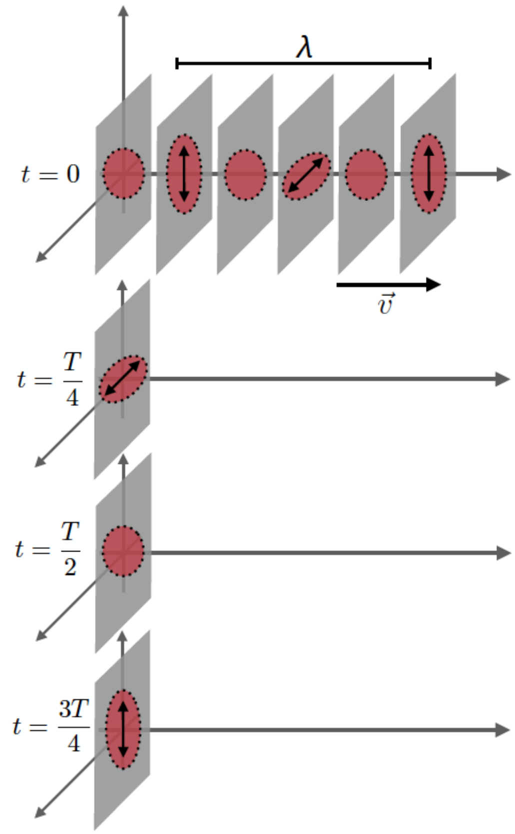

Figura 1: Deformações produzidas por uma onda gravitacional.

(b) A deformação causada pela onda gravitacional detectada pelo LIGO corresponde a um "estica" e "puxa" por um fator de uma parte em 10^{20}. Calcule a precisão na distância dos braços do instrumento, que o LIGO precisa ser capaz de medir para poder detectar essa onda. Compare essa distância com alguma outra escala de comprimento que você encontra na Física.

(c) Em 2017 o LIGO detectou uma onda gravitacional (GW170817) muito particular, que seria consistente com a órbita e colisão de duas estrelas de nêutrons (estrelas super-compactas no limiar de se tornarem buracos negros). Quase ao mesmo tempo, o satélite Fermi-LAT detectou um jato de raios-gama vindo aproximadamente da mesma direção. Essa coincidência permitiu que astrônomos apontassem seus telescópios naquela direção e encontrassem evidências de algo chamado Kilonova – justamente, o que se espera resultar da colisão de duas estrelas de nêutrons. Além de determinar exatamente onde esse evento ocorreu, essa observação permitiu determinar com grande precisão a velocidade de propagação das ondas gravitacionais. Sabendo que o intervalo de tempo entre o jato de raios-gama e o último "suspiro" da onda gravitacional chegar no LIGO é de menos de 1 s, e que a distância até a galáxia onde ocorreu essa colisão é de 130 milhões de anos-luz, encontre a precisão com que podemos dizer que a velocidade das ondas gravitacionais é igual à velocidade da luz.

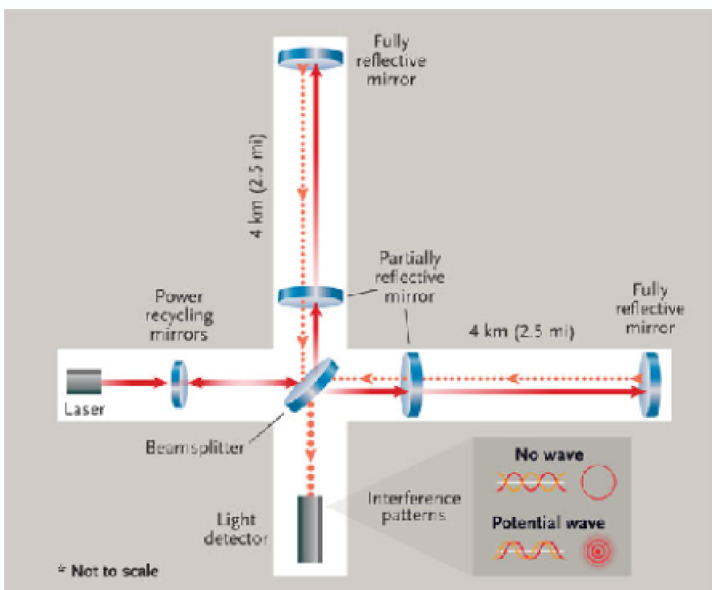

Figura 2: Experimento LIGO.

② **Impedância específica.** A impedância específica Z_0 de um meio material (fluido ou sólido) pode ser definida por

$$Z_0 = \frac{B}{v_s} = \rho_0\, v_s\,,$$

onde B é o módulo de elasticidade volumétrico do meio, ρ_0 é a densidade de equilíbrio e v_s é a velocidade do som no meio. Encontre, se necessário, as informações sobre ρ, B.

(a) Imagine que você esteja gritando com uma pessoa que se encontra mergulhada dentro de uma piscina. Estime quanto do som emitido será refletido e quanto será transmitido.

(b) Considere uma onda sísmica que vêm de um terremoto produzido no interior da Terra. Imaginando que a onda atravessa inicialmente rocha e que vá para um região de aterro, estime o coeficiente de transmissão da onda. O que acontece com a amplitude da onda transmitida?

(c) Quando o comprimento de onda do som é menor que o tamanho da cavidade contendo a onda sonora (em um cano, por exemplo), precisamos levar em conta o tamanho finito na impedância. Para o ar em uma cavidade de tamanho finito, a quantidade relevante não é a impedância específica (o que é propriedade apenas do meio), mas a impedância por unidade de área A:

$$Z = \frac{Z_0}{A} = \frac{B}{A v_s} = \frac{\rho v_s}{A} \qquad \lambda > \sqrt{A}\,,$$

Isso relevante quando $\lambda > \sqrt{A}$, onde λ é o comprimento de onda sonora e A é a sessão reta do cano. Estime o coeficiente de reflexão para passar de um cano de raio menor R_1 para um cano de raio maior R_2. Por que os megafones têm forma cônica?

③ **Serie de Fourier e Condições de Contorno** Considere uma corda de comprimento L, com uma de suas extremidades livre, de forma que está submetida às condições de contorno

$$\frac{\partial}{\partial x} A(x=0,t) = 0\,, \qquad \frac{\partial}{\partial x} A(x=L,t) = 0\,.$$

(a) Mostre que a solução geral da equação de onda para essas condições de contorno é

$$A(x,t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [\alpha_n \cos(\omega_n t) + \beta_n \sin(\omega_n t)] \cos(\frac{n\pi}{L}x)$$

(b) Imagine que conhecemos as condições iniciais do problema $A(x,0)$ e $\partial A(x,0)/\partial t$. Encontre uma expressão para α_n e β_n em termos dessas funções.

(c) Usando as fórmulas que você encontrou, determine α_n e β_n para uma corda que começa no repouso com a amplitude

$$A(x,0) = \begin{cases} \frac{L}{2} & \text{for} \quad 0 \leq x \leq L/2 \\ -\frac{L}{2} & \text{for} \quad L/2 \leq x \leq L \end{cases}$$

(d) Use o que você aprendeu acima para provar a identidade

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ... = \sum_{n=1,3,5,..}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n}\,.$$

④ **Equação de Onda da Corda Vibrante com gravidade.** Considere a equação da corda vibrante que derivamos em aula. Agora vamos assumir que exista além da tensão T na corda um campo gravitacional atuando no sistema.

(a) Usando como modelo o que fizemos em aula, derive a equação de onda abaixo para uma corda homogênea de densidade μ e comprimento L em um campo gravitacional constante:

$$\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} A(x,t) = T \frac{\partial^2}{\partial x^2} A(x,t) - \mu g\,.$$

(b) Considere a corda na presença da gravidade estando em repouso. Dadas as condições de contorno,

$$A(x=0,t), \qquad A(x=L,t) = 0\,,$$

encontre $A(x)$, a função que descreve a amplitude da corda em função do ponto x. Qual a solução geral para o problema?

(c) A Fig. 3 descreve o sistema do item (b) em repouso. Determine o valor de θ em termos dos parâmteros do sistema. **Dica:** Você deve primeiro determinar a relação entre o gradiente da corda e o ângulo θ.

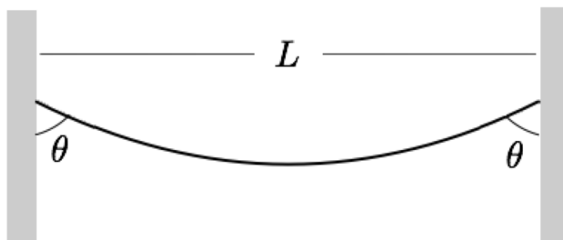

Figura 3: Corda em campo gravitacional.

⑤ **Ondas de gravidade na superfície da água.**Nas suas *Lectures on Physics* Richard Feynman escreve que "ondas na água que são facilmente vistas por qualquer um e que são usualmente usadas como exemplo de ondas em cursos elementares são o pior exemplo possível, elas apresentam todas as complicações que as ondas podem ter." Nesse problema exploraremos uma dessas complicações, as propriedades dispersivas de ondas na água. Considere ondas na superfície da água, conhecidas como ondas de gravidade. Assuma que as deformações da superfície sejam influenciadas pela gravidade g e pela tensão superficial T da água (expressa em unidades de N/m). Se a densidade da água é ρ e h a profundidade da água não perturbada, é possível mostrar que a velocidade de fase das ondas de superfície é dada por

$$v_\phi^2(k) = \left(\frac{g}{k} + \frac{Tk}{\rho}\right)\tanh(kh)\,,$$

onde $k = 2\pi/\lambda$ é o número de onda, $\tanh(kh)$ é a tangente hiperbólica, e a viscosidade do meio foi desprezada. Para água $\rho = 1$ g/cm^3.

(a) Em termos das quantidades dadas, qual é aproximadamente o λ_{critico} para o qual o efeito da tensão superficial fica comparável ao da gravidade? Para água a 20°C o comprimento de onda crítico é 2 cm. Qual a tensão superficial T da água?

(b) Suponha que $\lambda \gg \lambda_{\text{critico}}$ de forma que a tensão superficial seja desprezível. Qual a velocidade de fase e de grupo para ondas em águas rasas ($\lambda \gg h$)? As ondas são dispersivas nessa condição?

(c) Suponha que $\lambda \gg \lambda_{\text{critico}}$ de forma que a tensão superficial seja desprezível. Qual a velocidade de fase e de grupo para ondas em águas profundas ($\lambda \ll h$)? As ondas são dispersivas nessa condição?

(d) Suponha que a água seja profunda $\lambda \ll h$ e que os comprimentos de onda sejam tão curtos que $\lambda \ll \lambda_{\text{critico}}$ de forma que a tensão superficial domine e que a gravidade seja desprezível. Essas ondas são chamadas de ondas capilares. Qual a sua velocidade de fase e de grupo? As ondas capilares são dispersivas?

⑥ A Fig. 4 mostra a curva de dispersão de um certo meio.

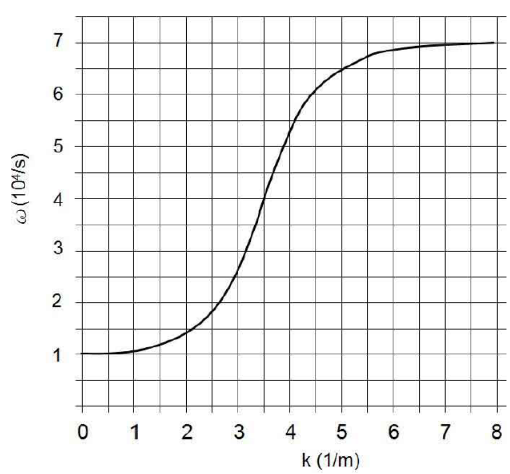

Figura 4: Relação de dispersão.

(a) Para que frequência(s) angular(es) ω (aproximadamente) as velocidades de fase e de grupo são iguais?

(b) Qual a frequência angular média você escolheria para transmitir um pulso na velocidade maior possível? Qual é essa velocidade?

(c) Qual será a resposta do meio se você excitá-lo com $\omega = \omega_0 = 1 \times 10^4\ \mathrm{s}^{-1}$. **Dica:** para $\omega \to \omega_0$ quais os valores da velocidade de fase e de grupo?

⑦ **Pulso gaussiano e transformada de Fourier inversa.** Considere uma corda infinita de densidade de massa ρ_L sob tensão L. Um pulso gaussiano transita na corda, causando um deslocamento vertical dado por

$$A(x,t) = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-vt}{\sigma}\right)^2\right].$$

(a) Encontre a distribuição de frequências $C(\omega)$ que contribuem para esse pulso calculando a *transformada de Fourier inversa.* Essa é uma integral muito conhecida, $C(\omega)$ também é uma Gaussiana com largura σ_ω. Você pode usar o *Mathematica* para encontrar essa distribuição ou qualquer outra forma que você quiser. Confira que todas as constantes estão corretas!

$$C(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, f(t)\, e^{i\omega t}.$$

(b) Calcule o produto das larguras das duas Gaussianas (σ e σ_ω) .

(c) Desenhe a forma do pulso $A(x,0)$ para $\sigma = 1$ e $\sigma = 5$. Você pode usar o *Mathematica* para fazer isso se quiser.

(d) Desenhe a forma da distribuição $C(\omega)$ em $x = 0$ para $\sigma = 1$ e para $\sigma = 5$ (σ, não σ_ω!).

(e) Compare as formas que você obteve pa $A(x,0)$ e $C(\omega)$ usando valores diferentes de σ. Você identificou algum comportamento interessante?