

Lista de Exercícios I

- ① Considere a energia potencial

$$U(x) = -U_1 \left[\left(\frac{x}{x_1} \right)^3 - \left(\frac{x}{x_1} \right)^2 \right],$$

onde U_1 e x_1 são constantes positivas.

- (a) Calcule os pontos de máximo e de mínimo da energia potencial;
- (b) Expanda a energia potencial entorno do mínimo até terceira ordem;
- (c) Para quais valores de x a aproximação harmônica é válida?
- (d) Qual a equação de movimento de uma partícula sujeita à energia potencial que está sendo considerada?
- (e) Dada a ausência de forças não conservativas, resolva a equação $dE/dt = 0$ (com E a energia total da partícula) e mostre que uma das equações obtidas é a equação do movimento do ponto antecedente;
- (f) Obtenha a equação de movimento em um entorno do mínimo expandindo a força encontrada e a energia potencial; mostre que os dois resultados são equivalentes;
- (g) Qual seria a equação de movimento se expandirmos a energia potencial entorno ao máximo? Discuta o resultado obtido.

- ② O potencial de Lennard-Jones

$$U(r) = U_0 \left[\left(\frac{r_0}{r} \right)^{12} - 2 \left(\frac{r_0}{r} \right)^6 \right], \quad r > 0,$$

é usado para descrever a energia potencial de interação entre dois átomos. Repita a análise do Exercício 1, e calcule a frequência de oscilação entorno do mínimo.

- ③ Mostre que é sempre possível escrever

$$C \cos(\omega t) + D \sin(\omega t) = A \cos(\omega t + \varphi),$$

calculando explicitamente A e $\tan \varphi$.

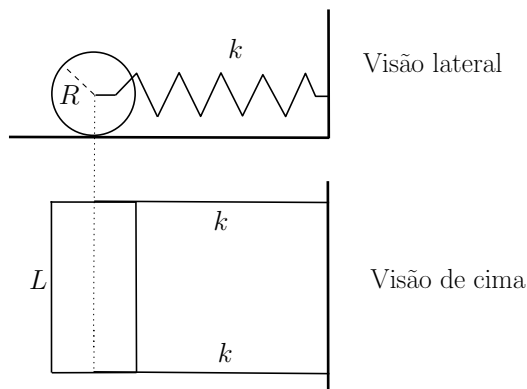


Figura 1: Cilindro conectado a molas.

- ④ Considere um cilindro de massa M , raio R e comprimento L . Duas molas (ambas de constante elástica k) estão conectadas ao eixo do cilindro, de acordo com a figura. Usando a ausência de forças não conservativas, calcule a equação do movimento quando o cilindro está em rotação sem deslizar na superfície.
- ⑤ Resolva a equação diferencial

$$a\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) = F_0$$

onde a , b , c e F_0 são constantes. Qual a solução da equação homogênea associada? Qual a solução particular? Suponha que, no instante $t = 0$, $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = 0$.

- ⑥ Um corpo de massa m está conectado a uma mola de constante elástica k e comprimento de repouso ℓ .
- Qual a equação de movimento?
 - Resolva a equação de movimento com condições iniciais $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = v_0$.
- ⑦ Considere um oscilador harmônico simples em movimento com trajetória $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$. Calcule:
- A energia total do sistema;
 - Quanto vale a frequência de oscilação?

- (c) Definimos a média temporal de uma função periódica durante um período de oscilação como

$$\bar{f} = \frac{1}{T} \int_0^T dt f(t),$$

onde T é o período de oscilação. Calcule as médias

$$\overline{\cos(\omega t)}, \quad \overline{\sin(\omega t)}, \quad \overline{\cos^2(\omega t)}, \quad \overline{\sin^2(\omega t)}$$

calculando explicitamente as integrais;

- (d) Repita o cálculo do item (c) usando a linearidade da integral e considerando as funções trigonométricas escritas em termos de exponenciais complexos;
- (e) Usando os resultados obtidos no item (c), calcule a energia total média durante um período de oscilação.
- ⑧ Considere um oscilador harmônico de massa M , sujeito a força elástica (de constante k) e a uma força de atrito viscoso (com coeficiente de atrito μ).
- (a) Calcule e resolva a equação de movimento, supondo o amortecimento ser sub-crítico ou super-crítico;
- (b) Considere o caso em que $x(t=0) = x_0$ e $\dot{x}(t=0) = 0$. Escreva os resultados do item (a) usando estas condições iniciais;
- (c) Quanto vale o período de oscilação nos dois casos (amortecimento sub-crítico e super-crítico)?
- (d) Calcule a energia média durante um período de oscilação nos dois casos.
- ⑨ Considere duas massas m_1 e m_2 conectadas por uma mola de constante elástica k e comprimento de repouso ℓ . O sistema está em um plano sem atrito, e a dinâmica pode ser considerada como sendo unidimensional.
- (a) Considerando um referencial inercial apropriado, escreva as equações de movimento para os dois corpos;
- (b) Usando os resultados do item (a), escreva as equações de movimento da coordenada do centro de massa e da coordenada relativa;
- (c) Resolva as equações diferenciais do item (b);
- (d) Escreva a energia total do sistema, e verifique que $dE/dt = 0$.