Sistemas de Coordenadas e Vetores na Física

1 Sistemas de Coordenadas

Sistemas de coordenadas são úteis para a descrição e resolução de problemas físicos. Existem diversos sistemas de coordenadas de interesse prático, o ponto é escolher o sistema mais adequado para um determinado problema, explorando vínculos e simetrias do problema particular.

O sistema de coordenadas mais comum é aquele que chamamos de *Cartesiano* ou *Retangular*. Nesse sistema lidamos com três famílias de planos mutualmente perpendiculares: $x = \text{cont.}$, $y = \text{cont.}$ e $z = \text{cont.}$. Descrevemos qualquer ponto P nesse sistema de coordenadas como $P = (x_p, y_p, z_p)$ onde (x_p, y_p, z_p) são números que representam as coordenadas da intersecção dos três planos em P.

Podemos agora imaginar outras três famílias de superfícies que não precisam ser planos e que vamos considerar aqui como mutualmente perpendiculares [1]. Podemos descrever o mesmo ponto P em um novo sistema de coordenadas descrito pelas superfícies perpendiculares: $q_1 = \text{cont.}$, $q_2 = \text{cont.}$ e $q_3 = \text{cont.}$. Nesse caso podemos identificar o ponto também pela intersecção dessas três superfícies, isto é, $P = (q_{1p}, q_{2p}, q_{3p})$. Assim, em principio, podemos escrever

$$\begin{aligned} x &= x(q_1, q_2, q_3)\,, \\ y &= y(q_1, q_2, q_3)\,, \\ z &= z(q_1, q_2, q_3)\,, \end{aligned} \tag{1}$$

de forma que temos como relacionar o sistema de coordenadas cartesiano com um novo sistema de coordenadas curvilíneo arbitrário.

[1] Essa condição, que de fato é desnecessária, é satisfeita para muitos sistemas de coordenadas de interesse físico, por essa razão iremos adotá-la aqui.

Exemplo 1: Coordenadas Polares

Quando o problema físico puder ser reduzido efetivamente a duas dimensões, podemos identificar um ponto P pelas coordenadas (x_1, y_1) no sistema cartesiano e pelas coordenadas (r_1, θ_1) no sistema de coordenadas polares definido por $q_1 \equiv r = \text{const.}$ e $q_2 \equiv \theta = \text{const.}$ de acordo com a Fig. 1.

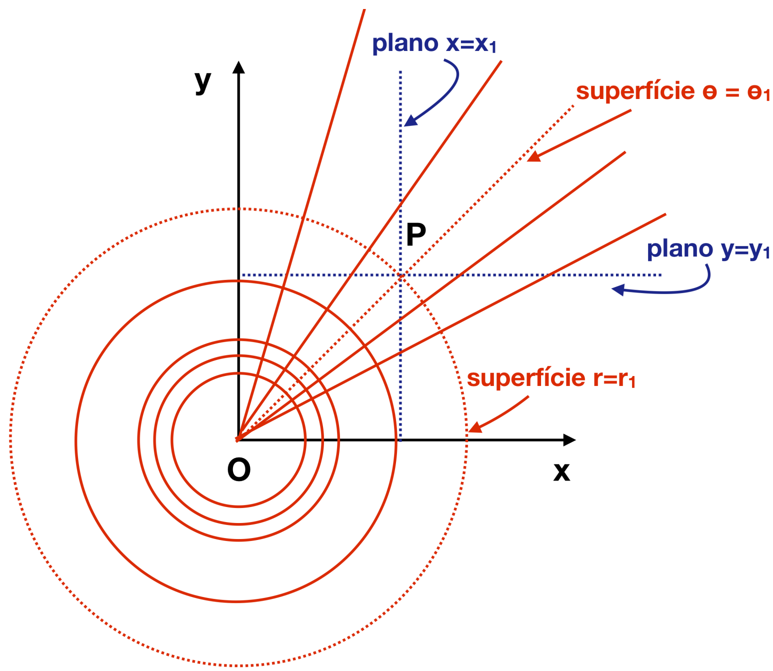

Figura 1: **Sistema de Coordenadas Polares**

Aqui claramente a relação entre os dois sistemas de coordenadas é dada por:

$$x_1 = x_1(r_1, \theta_1) = r_1 \cos\theta_1 \qquad \text{e} \qquad y_1 = y_1(r_1, \theta_1) = r_1 \sin\theta_1 \,.$$

Exemplo 2: Coordenadas Cilíndricas

Podemos incluir mais uma dimensão no sistema de coordenadas polares para definir P no espaço tridimensional. Basta incluir $q_3 \equiv z = \text{const.}$. Nesse caso a relação entre o sistema de coordenadas cartesiano e cilíndrico é dada por:

$$x = x(r, \theta, z) = r\cos\theta \quad y = y(r, \theta, z) = r\sin\theta \quad \text{e} \quad z = z\,,$$

ou seja, a coordenada z coincide nos dois sistemas.

Exemplo 3: Coordenadas Esféricas

Há um outro sistema de coordenada muito útil em física quando a simetria esférica pode ser utilizada de forma a simplificar o problema, é o chamado sistema de coordenadas esférico. Aqui um ponto P descrito pelas coordenadas (x, y, z) no sistema cartesiano é descrito por $(r = R_1, \phi = \phi_1, \theta = \theta_1)$ no sistema de coordenadas esféricas definido pelas superfícies $q_1 \equiv r = \text{const.}$, $q_2 \equiv \phi = \text{const.}$ e $q_3 \equiv \theta = \text{const.}$, como pode ser visto na Fig. 2.

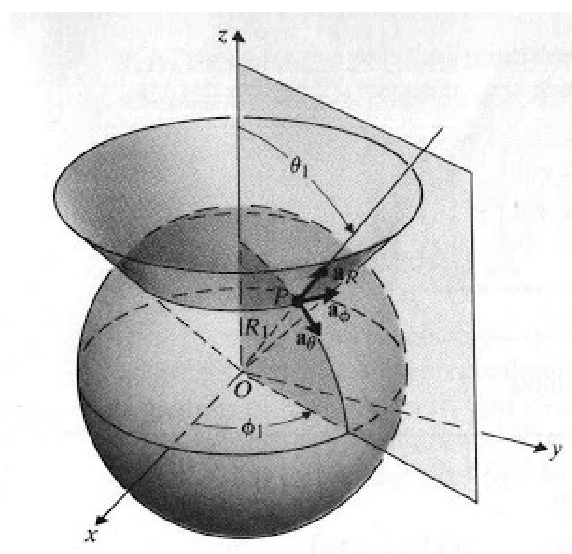

Figura 2: **Sistema de Coordenadas Esféricas**

Nesse caso a relação entre o sistema de coordenadas cartesiano e esférico é dada por:

$$x = x(r,\phi,\theta) = r\cos\phi\sin\theta \quad y = y(r,\phi,\theta) = r\sin\phi\sin\theta \quad \text{e} \quad z = z(r,\phi,\theta) = r\cos\theta\,,$$

2 Simetrias e Invariantes

Tomemos agora por simplicidade o sistema de coordenadas cartesiano bidimensional. Considere as coordenadas de dois pontos $\mathbf{P_1} = (x_1, y_1)$ e $\mathbf{P_2} = (x_2, y_2)$ segundo um sistema de referência $\mathbf{S}$. Considere agora um segundo sistema de referência $\mathbf{S}'$, cuja origem está em $(x = a, y = 0)$, segundo o referencial $\mathbf{S}$ e de acordo com a Fig. 3. Nesse novo referencial $\mathbf{P_1} = (x'_1, y'_1)$ e $\mathbf{P_2} = (x'_2, y'_2)$, onde

$$x'_1 = x_1 - a \qquad x'_2 = x_2 - a \qquad y'_1 = y_1 \qquad y'_2 = y_2\,.$$

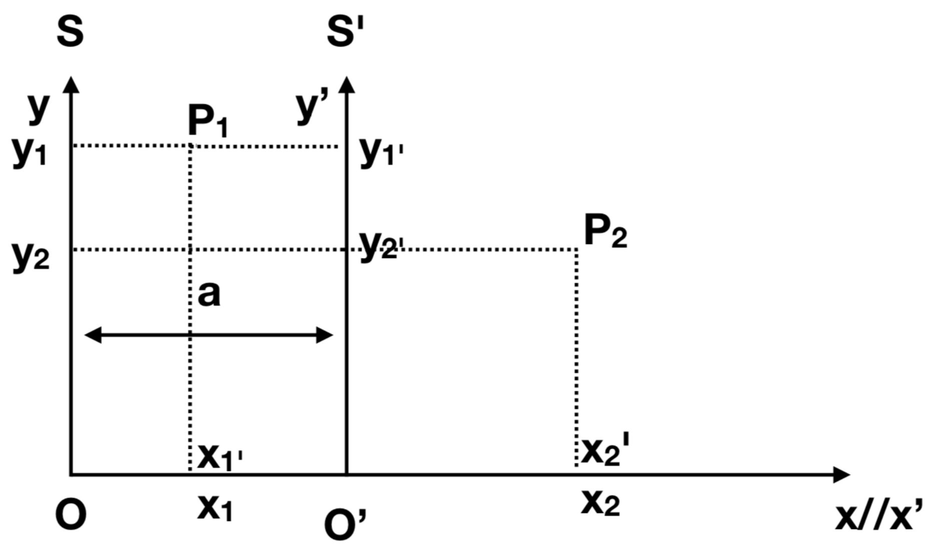

Figura 3: **Dois referenciais S e S′ transladados um do outro.**

Vemos que embora as coordenadas dos pontos $\mathbf{P_1}$ e $\mathbf{P_2}$ sejam diferentes nos dois referencias transladados, as quantidades

$$\Delta x' = x_2' - x_1' = x_2 - a - x_1 + a = \Delta x \quad \text{e} \quad \Delta y' = y_2' - y_1' = y_2 - y_1 = \Delta y$$

não mudaram entre referenciais. Elas são invariantes por translação entre referenciais. Dizemos que essas quantidades são simétricas por translação.

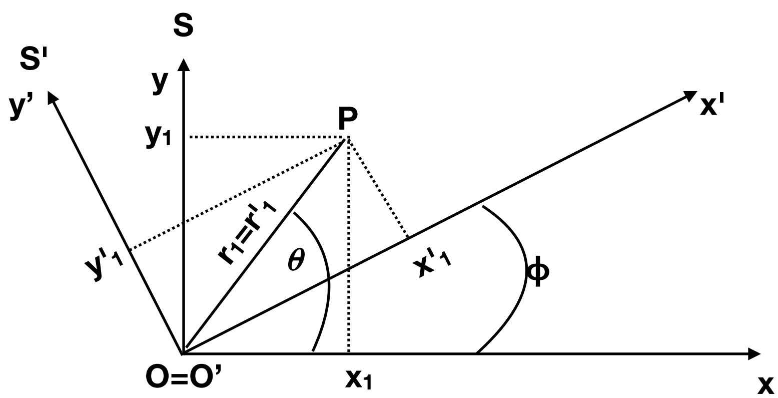

Figura 4: **Dois referenciais S e S′ rodados de um ângulo ϕ.**

Imagine agora que **S′** seja um referencial rodado de um ângulo ϕ com relação a **S** de acordo com a Fig. 4, mas com a mesma origem. Nesse caso um ponto **P** que tem coordenadas (x_1, y_1) segundo o referencial **S**, tem coordenadas (x_1', y_1') segundo **S′** com a magnitude

$$r_1^2 \equiv x_1^2 + y_1^2 = x_1'^2 + y_1'^2 \equiv r_1'^2\,,$$

invariante nos dois referenciais. Se θ é o ângulo entre o eixo x e a reta que une a origem a P, como mostra a Fig. 4, então podemos escrever

$$x_1 = r_1 \cos\theta\,, \qquad y_1 = r_1 \sin\theta\,, \tag{2}$$

$$x_1' = r_1 \cos(\theta - \phi) = r_1(\cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi) = x_1\cos\phi + y_1\sin\phi \tag{3}$$

$$y_1' = r_1 \sin(\theta - \phi) = r_1(\sin\theta\cos\phi - \cos\theta\sin\phi) = y_1\cos\phi - x_1\sin\phi \tag{4}$$

o que nos dá a transformação entre as coordenadas dos dois referenciais.

As leis da Física até onde sabemos hoje são as mesmas sob translação e rotação dos eixos de coordenadas, logo devem ter a mesma forma nos referenciais $\mathbf{S}$ e $\mathbf{S}'$. Isso vem do fato que o espaço é homogêneo (todos os pontos são equivalentes) e isotrópico (todas as direções são equivalentes). Essas simetrias das leis da Física são tão importantes que vamos usar uma técnica matemática para explorar essas propriedades e deixar as equações que definem leis Físicas sempre com a mesma forma (covariantes) nos dois referencias: a análise vetorial. Uma das grandes vantagens da descrição que vamos discutir agora é que não precisamos fazer mais uso de um sistema de coordenadas específico.

3 Escalares e Vetores

Do ponto de vista das transformações que discutimos (translação e rotação entre referenciais) existem dois tipos de grandezas na Física (de fato existem mais, mas vamos começar com dois!): escalares e vetoriais.

Grandezas escalares são definidas por um único valor numérico (magnitude) que é o mesmo (invariante) em $\mathbf{S}$ e $\mathbf{S}'$, como é o caso dos comprimentos $r_1 = r_1'$ do exemplo anterior. Exemplos de grandezas escalares são comprimento, temperatura, volume, massa etc. Essas grandezas não mudam de valor quando mudamos de um referencial $\mathbf{S}$ para um referencial $\mathbf{S}$!

Grandezas vetoriais são objetos geométricos independentes de sistemas de coordenadas. Do ponto de vista geométrico, vetores são um segmento de linha direcionado, quantidades com magnitude, direção e sentido. Exemplos de grandezas vetoriais são deslocamento, velocidade, aceleração, força etc. Tradicionalmente representamos vetores por uma letra com uma seta ou por uma letra em negrito, $\vec{a}$ ou $\mathbf{a}$.

Para descrever um vetor precisamos especificar um comprimento (magnitude ou módulo) e uma direção. Assumiremos que translação paralela não muda um vetor. Logo dois vetores serão iguais se tiverem o mesmo módulo e direção. O comprimento de um vetor que chamamos de *módulo* é identificado por barras verticais, *i.e.* o módulo de $\mathbf{a}$ é $|\mathbf{a}|$ ou simplesmente a.

Se o módulo de um vetor for 1, chamamos esse vetor de vetor unitário ou *versor*. Designamos o versor paralelo a $\mathbf{a}$ por

$$\hat{\mathbf{a}} \equiv \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{\mathbf{a}}{a} \quad \rightarrow \quad \mathbf{a} = a\,\hat{\mathbf{a}}\,.$$

Multiplicação de um vetor por um escalar:

Se multiplicarmos um vetor $\mathbf{a}$ por um número escalar $\alpha > 0$, obtemos um outro vetor $\mathbf{c} = \alpha\,\mathbf{a}$, onde $\mathbf{c}$ é um vetor paralelo a $\mathbf{a}$ mas com um módulo α vezes maior (ou menor) do que o de $\mathbf{a}$. Assim

$$\hat{\mathbf{c}} = \frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{c}|} = \frac{\alpha\mathbf{a}}{|\alpha\mathbf{a}|} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \hat{\mathbf{a}}\,,$$

e $|\mathbf{c}| = \alpha\,|\mathbf{a}|$. Vemos assim que se $\alpha < 0$ a multiplicação de um vetor por α muda tanto o módulo como o sentido do vetor.

Adição ou Subtração de dois vetores:

Para adicionar os vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ coloque a origem do primeiro na extremidade do segundo a Fig. 5. Vemos que $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$

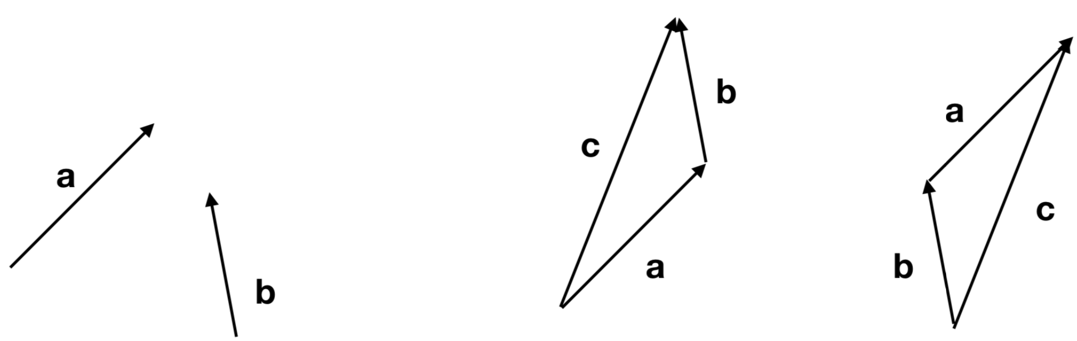

Figura 5: Soma dos vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$.

Claramente $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = 0$.

Produto escalar de dois vetores:

O produto escalar de dois vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ é um escalar denotado por $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ e definido por

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\,\cos\theta\,,$$

onde θ é o ângulo entre os dois vetores segundo a Fig. 6. Vemos que $|\mathbf{b}|\,\cos\theta$ é a projeção de $\mathbf{b}$ na direção de $\mathbf{a}$ (ou $|\mathbf{a}|\,\cos\theta$ a projeção de $\mathbf{a}$ na direção de $\mathbf{b}$). Se $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{0}$ então ou temos $|\mathbf{a}| = 0$ ou $|\mathbf{b}| = 0$ ou $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ são vetores perpendiculares ($\theta = \pi/2$). Note que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^{\mathbf{2}} = a^2$. É possível mostrar que o produto escalar de vetores é distributivo, isto é, $(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ (demosntre isso!).

Podemos obter a lei dos cossenos usando $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{c} \cdot \mathbf{c} &= (\mathbf{a}+\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} \\
c^2 &= a^2 + b^2 + 2\,\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \\
c^2 &= a^2 + b^2 + 2\,a\,b\,\cos\theta \\
c^2 &= a^2 + b^2 + 2\,a\,b\,\cos(\pi - \phi) \\
c^2 &= a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos\phi \qquad (5)
\end{aligned}$$

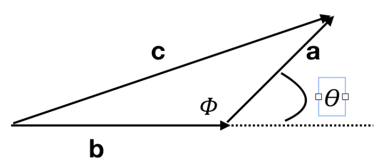

Figura 6: Ângulos entre $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$.

Produto Vetorial entre dois vetores:

O produto vetorial entre dois vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ é um vetor $\mathbf{d}$. Denotamos $\mathbf{d}$ por

$$\mathbf{d} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

cuja magnitude é $|\mathbf{d}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\,\sin\theta$, onde θ é o mesmo ângulo da Fig. 6 (sempre menor ou igual a π). Veja que o produto vetorial é nulo para $\theta = 0$ ou π, mesmo quando $|\mathbf{a}|$ e $|\mathbf{b}|$ não são nulos. Quando desenhamos $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$

origem com origem, eles determinam um plano. Definimos a direção de $\mathbf{d}$ como perpendicular ao plano de $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, cujo sentido é dado pela chamada regra da mão direita (veja Fig. 7. Claramente $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ e logo $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ qualquer que seja $\mathbf{a}$.

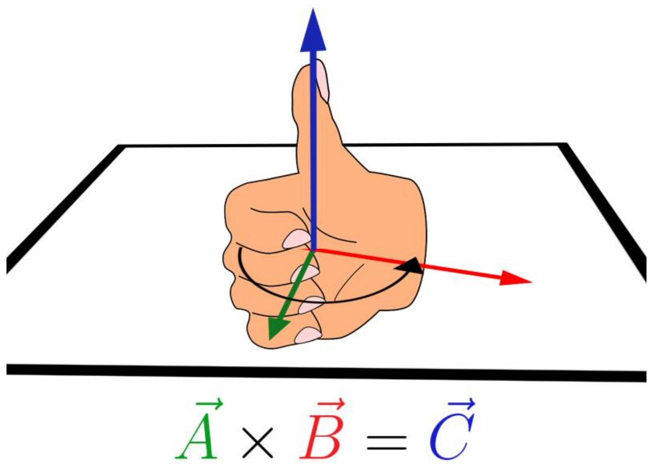

Figura 7: Regra da mão direita para o produto vetorial.

Até agora definimos vetores e suas propriedades de forma independente de sistemas de coordenadas. Podemos descrevê-los também em sistemas de coordenadas particulares. Vemos na Fig. 8 que o vetor deslocamento da origem até o ponto P, $\mathbf{r}$, pode ser descrito em termos de sua componentes no sistema de referência $\mathbf{S}$ ou no sistema de referência $\mathbf{S}'$. Note que o vetor é sempre o mesmo, sua decomposição em componentes que é diferente!

No sistema de referência $\mathbf{S}$ podemos escrever

$$\mathbf{r} = x_1\,\mathbf{i} + y_1\,\mathbf{j}\,,$$

onde $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ são os versores na direção dos eixos x e y, respectivamente. No sistema de referência $\mathbf{S}'$, rodado de um ângulo ϕ relativamente a $\mathbf{S}$, Vamos decompor o mesmo vetor $\mathbf{r}$ nas direções perpendiculares dos eixos x' e y' cujos versores respectivos são $\mathbf{i}'$ e $\mathbf{j}'$, logo

$$\mathbf{r} = x_1'\,\mathbf{i}' + y_1'\,\mathbf{j}'\,,$$

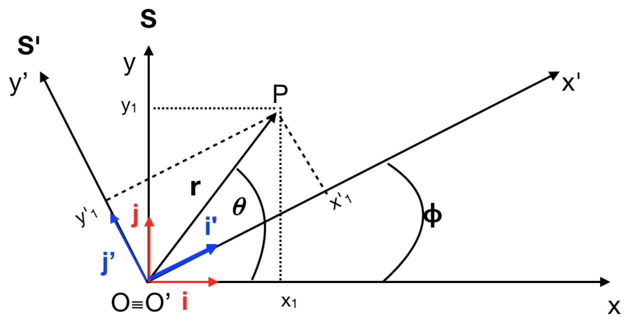

Figura 8: Descrição do vetor deslocamento $\mathbf{r}$ em $\mathbf{S}$ e $\mathbf{S}'$, dois sistemas de referência rodados um em relação ao outro de um ângulo ϕ.

onde

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{r} = r^2 = (x_1\,\mathbf{i} + y_1\,\mathbf{j})\cdot(x_1\,\mathbf{i} + y_1\,\mathbf{j}) = x_1^2\,\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} + y_1^2\,\mathbf{j}\cdot\mathbf{j} + 2\,x_1 y_1\,\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = x_1^2 + y_1^2\,,$$

pois $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = 1$ e $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = 0$. O mesmo vale para o sistema de referência $\mathbf{S}'$, assim $r^2 = x_1'^2 + y_1'^2$ também, explicitamente invariante por rotação do sistema de coordenadas, como deveria ser.

As relações entre x_1, y_1, e x_1' e y_1' são as mesmas dadas pela Eq. (3) e Eq. (4), claramente também temos que

$$\mathbf{i}' = \cos\phi\,\mathbf{i} + \sin\phi\,\mathbf{j}\,, \qquad \mathbf{j}' = -\sin\phi\,\mathbf{i} + \cos\phi\,\mathbf{j}\,,$$

de forma que

$$\mathbf{i}'\cdot\mathbf{i} = \cos\phi\,, \quad \mathbf{i}'\cdot\mathbf{j} = \sin\phi \quad \text{e} \quad \mathbf{j}'\cdot\mathbf{i} = -\sin\phi\,, \quad \mathbf{j}'\cdot\mathbf{j} = \cos\phi\,.$$