Análise Dimensional na Física

O primeiro passo na modelagem de qualquer fenômeno físico é a identificação das grandezas relevantes para entender o fenômeno, e em seguida encontrar a relação entre elas. Essa relação é muitas vezes obtida através das leis da Física. Há porém um outro método muito poderoso de modelagem de fenômenos físicos: a análise dimensional. Você muito provavelmente já encontrou a análise dimensional antes no contexto de *checar as unidades* dos dois lados de uma expressão para se certificar que os dois lados da equação tem a mesma unidade. Esse é o exemplo mais trivial (embora muito importante!) do uso da análise dimensional. Aqui vamos usar a análise dimensional de outra forma: para resolver problemas ou inferir alguma informação útil sobre a solução que procuramos.

Qual é a idéia básica desse método de abordagem? A idéia básica é que as *leis da Física não dependem da escolha (arbitraria) das unidades de medida*. As segunda lei de Newton, por exemplo, $\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}$, não pode depender de medirmos massa em quilogramas, a aceleração em metros por segundo ao quadrado, e a força em newtons, ou de medirmos massa em arrobas, aceleração em pés por segundo ao quadrado, e força em libras. O sistema de unidades que adotaremos é o Sistema Internacional (SI), onde as comprimentos são medidos em metros, massas em quilogramas e tempo em segundos. Você encontrará outros sistemas de unidades ao longo do curso de Física. A escolha do sistema de unidades é frequentemente ditada pela escala dos fenômenos físicos que estamos considerando.

Como exemplo concreto vamos considerar aqui um pêndulo simples consistindo de uma massa m suspensa em um ponto fixo por uma corda. Seja τ o tempo que leva o pêndulo para completar um ciclo de oscilação (é o período de oscilação). Como esse período depende das quantidades que definem o pêndulo e que determinam o seu movimento? Quais as possíveis grandezas envolvidas nesse problema? É razoável assumir que as grandezas relevantes aqui são a massa do pêndulo m, o comprimento do pêndulo ℓ, a aceleração da gravidade g, e a abertura angular inicial θ_0. Será que essas são todas as quantidades relevantes? Não é possível ter certeza absoluta disso, mas podemos verificar se são suficientes. Caso não o sejam precisamos pensar melhor. Mais adiante veremos que podemos responder essa questão resolvendo a equação diferencial resultante da aplicação da segunda lei de Newton. Mas agora vamos usar análise dimensional. Precisamos nesse caso encontrar a função f tal que

$$\tau = f(m, \ell, g, \theta_0)\,.$$

Para isso vamos fazer uma lista das dimensões das quantidades em termos das dimensões básicas: L (comprimento), M (massa) e T (tempo). Seguindo a convenção sugerida por Maxwell, denotamos as dimensões de uma quantidade física ϕ por $[\phi]$, assim

$$[\tau] = T \qquad [m] = M \qquad [\ell] = L \qquad [g] = L\,T^{-2}$$

e $[\theta_0] = 1$ o que significa que θ_0 é adimensional. Começamos escrevendo

$$\tau = C\,\ell^{\alpha}\,m^{\beta}\,g^{\gamma}$$

onde C é uma constante adimensional e α, β e γ são números racionais. Nossa primeira observação é que o período tem dimensão de tempo, logo a massa não pode entrar na relação pois nem o comprimento, nem a aceleração podem eliminar a dependência com a massa, logo $\beta = 0$ e

$$\tau = C\,\ell^{\alpha}\,g^{\gamma} \rightarrow T = L^{\alpha}[L\,T^{-2}]^{\gamma} = L^{\alpha+\gamma}\,T^{-2\gamma}$$

levando as relações que devem ser satisfeitas

$$0 = \alpha + \gamma \qquad 1 = -2\gamma$$

cuja solução é $\alpha = -\gamma = \frac{1}{2}$.

Logo a análise dimensional nos leva à fórmula

$$\tau = C\sqrt{\frac{\ell}{g}}\,,$$

dimensionalmente correta. Como θ_0 é adimensional, pode ou não aparecer. Por essa razão o máximo que conseguimos dizer é que

$$\tau = f(\theta_0)\sqrt{\frac{\ell}{g}}\,,$$

mais tarde veremos que $f(\theta_0) = 2\pi$ para pequenas oscilações.

Vejamos uma outra ilustração desse método. Considere uma força de magnitude constante F que atua por uma distância d sobre um objeto de massa m. Qual a velocidade v do objeto?

$$v = C\, F^{\alpha} m^{\beta} d^{\gamma} \to [v] = LT^{-1} = [F]^{\alpha}[m]^{\beta}[d]^{\gamma} = (MLT^{-2})^{\alpha} M^{\beta} L^{\gamma}$$

de onde temos que

$$0 = \alpha + \beta \qquad 1 = \alpha + \gamma \qquad 1 = 2\alpha$$

cuja solução é $\alpha = -\beta = \frac{1}{2} = \gamma$. Logo

$$v = C\,\sqrt{\frac{F\,d}{m}}$$

mais adiante veremos que usando a conservação da energia obteremos que $C = \sqrt{2}$.