Lista de Exercícios IX

① A densidade da Terra aumenta na direção do centro. Isso e devido tanto as grandes pressões as quais a matéria e submetida nas camadas interiores, mas também remetem ao período de formação do nosso planeta: quando a Terra começou a se formar de uma nuvem de gás e poeira, os elementos mais pesados foram os primeiros a cair no centro do poço de potencial gravitacional, e terminaram presos no interior do planeta. A figura abaixo mostra um modelo para a densidade das camadas terrestres, como função do raio.

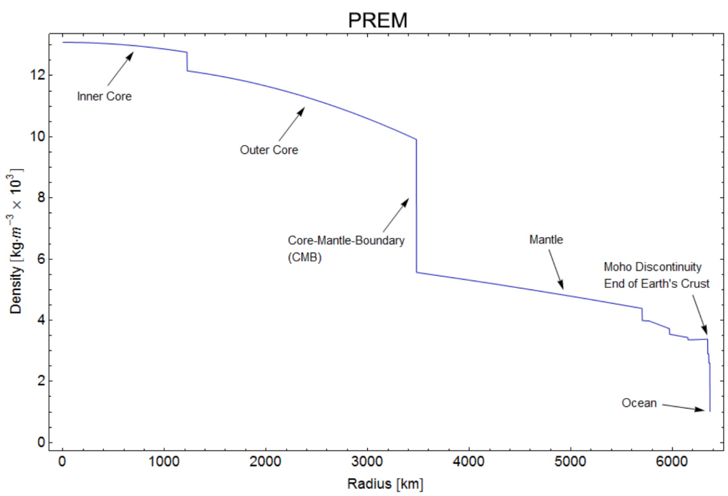

Figura 1: A densidade das diversas camadas do planeta Terra, como função do raio desde o centro.

(a) Calcule a aceleração da gravidade na superfície da Terra a partir do perfil da densidade mostrada na Fig. **??**. Você pode fazer uma estimativa da integral "no olhômetro". Verique se o resultado bate com o que você conhece (g $\approx$ 9.8 m s^{-2}).

(b) Caso você abrisse um buraco vertical que atravessasse a Terra até o outro lado, passando pelo centro, qual seria a velocidade máxima que você atingiria?

② Em 1797 Henry Cavendish fez um experimento que permitiu medir a força da gravidade entre duas massas em um laboratório. Nesse experimento ele: (1) mediu a constante de Newton, e (2) mediu a massa da Terra. O aparato, chamado de *balanca de torsão*, está mostrado no diagrama da Fig. 2, e consiste de duas esferas (de massas m_1) equilibradas nas pontas de uma haste (de comprimento L), que fica pendurada por meio de um fio fino.

O fio tem um coeficiente de torsão κ, de tal forma que um pequeno desvio θ do equílbrio ($\theta = 0$) gera uma força restauradora nas pontas igual a $F_T = -\kappa\,\theta/L$.

Próximas a essas esferas encontram-se fixas duas outras esferas de massas $m_2 \gg m_1$.

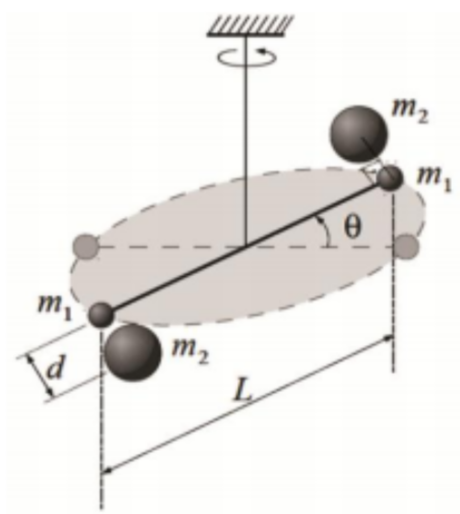

Figura 2: Balança de Cavendish.

(a) Mostre que, apenas com as massas m_1 penduradas na haste, pequenas oscilações em torno do equílbrio podem ser descritas como um movimento pendular, com período dado por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}}\,,$$

onde $I = (1/2)m_1 L^2$. Portanto, uma medida de T no laboratório serve para estimar κ.

(b) Agora aproxime as massas m_2 por uma distância d ao longo da tangente do arco descrito pela haste. Como resultado da força gravitacional a haste gira por um ângulo α. Obtenha G em termos das quantidades conhecidas (κ, m_1, m_2, L e a medida de α). Por sinal... o resultado depende de m_1?

(c) Faça uma estimativa: para massas $m_1 = 1$ kg, massas $m_2 = 100$ kg, uma haste de comprimento L, uma distância de $d = 0.01$ m, e um período de oscilação do pêndulo de torsão de 10 s, estime o ângulo (em radianos). Como você faria para medir um ângulo tão pequeno?

③ Como visto em sala de aula, as trajetórias de corpos que se atraem pela força gravitacional são seções cônicas, ou seja, o raio desde um dos focos é:

$$r(t) = \frac{r_0}{1 + \epsilon \cos \theta(t)} \, ,$$

onde r_0 é chamado de *semi-lato reto*, e ϵ é a excentricidade. Evidentemente, para um círculo temos $\epsilon = 0$, e r_0 é o raio do círculo. Neste problema, assuma que o Sol tem uma massa muito maior do que a do planeta, de forma que o centro de massa do sistema está basicamente dentro do próprio Sol – e que ambos estão na origem do sistema de coordenadas. Quando um determinado planeta chega no ponto de máxima aproximação (o periélio) com o Sol, a uma distância a (ao longo do eixo x positivo), sabemos que ele tem uma velocidade V_{max}, e que quando ele está à distância máxima b (o afélio), a velocidade é V_{min}.

(a) Calcule o vetor momento angular do planeta.

(b) Sabendo que o momento angular é conservado, calcule o período da órbita desse planeta em torno do Sol, em termos das quantidades medidas. Para esse cálculo você talvez precise da seguinte integral

$$\int_0^{2\pi} d\theta \frac{1}{(1 + \epsilon \cos \theta)^2} = \frac{2\pi}{(1 - \epsilon^2)^{3/2}} \, .$$

(c) Calcule o vetor de Laplace-Runge-Lenz desse sistema – lembre-se que no caso de forças $\sim 1/r^2$ esse vetor é uma constante. Use esse fato para facilitar o seu cálculo!

④ Nós geralmente temos assumido que a massa do Sol é muito maior do que a dos planetas. Vamos relaxar essa hipótese, e supor que duas massas m_1 e m_2 executam órbitas. Mostre que essas órbitas também são elipses, com o centro de massa no foco, e que essas elipses têm as mesmas excentricidades, mas os afélios (pontos de máxima aproximação com o foco) estão em direções opostas.

⑤ Demonstre as seguintes identidades relacionadas ao produto vetorial:

(a) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{c} \cdot \vec{a}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$.

(b) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$[1]

(c) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) = 0$[2]

(d) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$.

⑥ Considere um sistema de N partículas com massas m_i, posições $\vec{r}_i$, e velocidades $\vec{v}_i$.

(a) Suponha que o momento angular total desse sistema é $\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{p}_i$. Porém, após fazer todas as medidas das posições e velocidades dessas partículas, nós percebemos que o referencial adotado inicialmente não era o do centro de massa (CM). Seja $\vec{R}(t)$ a posição do CM. Mostre que, no referencial do CM, o momento angular do sistema é $\vec{L}_{\text{CM}} = \vec{L} + \vec{R} \times \vec{P}_{\text{CM}}$, onde $\vec{P}_{\text{CM}}$ é o momento linear do CM no referencial original.

(b) Nós já sabemos que o momento angular desse sistema é conservado (em qualquer referencial inercial!) se há apenas forças internas entre as partículas desse sistema. Agora suponha que deixamos esse sistema de partículas cair – ou seja, as partículas ficam sujeitas à aceleração da gravidade (inclusive, claro, o próprio CM). Mostre que o momento angular como medido no referencial do CM (que agora não é mais inercial, mas tudo bem!) se conserva.

(c) Agora suponha que todas as partículas são sujeitas a uma *força* externa idêntica e constante $\vec{F}_{\text{ext}}$ – e portanto as acelerações não

[2]Essa é a fórmula para o volume de um paralelepípedo de lados $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$.
[2]Essa expressão é conhecida como Identidade de Jacobi.

são mais as mesmas. Mostre que nesse caso o momento angular varia como:

$$\frac{\vec{L}_{\text{CM}}}{dt} = \vec{R}_{\text{m}} \times \vec{F}_{\text{ext}}\,,$$

onde $\vec{R}_{\text{m}}$ é o raio médio do sistema, $\vec{R}_{\text{m}} = \sum_i \vec{r}_i$.