

## Lista de Exercícios VIII

- ① Considere a colisão *completamente inelástica* entre dois corpos de massas  $m_1$  e  $m_2$ . Para tempos  $t < 0$  os dois corpos estão em movimento em direções ortogonais, até chegar ao tempo  $t = 0$  em que eles colidem. Descreva o movimento dos corpos para tempos  $t > 0$ , ou seja, depois da colisão.
- ② O universo é composto por cerca de 70% de energia escura (responsável pela expansão acelerada do universo) enquanto o restante 30% pode-se dividir entre um 5% de matéria ordinária (prótons, elétrons etc) e um 25% de *matéria escura*, matéria que interage gravitacionalmente mas que ou não interage eletromagneticamente ou interage muito fracamente. Existem experimentos na Terra (por exemplo, Xenon1T ou DarkSide) que procuram as colisões entre matéria escura e núcleos do detector. Considere a colisão *elástica* entre uma partícula de matéria escura e um núcleo:
- (a) Trabalhando no referencial inercial de repouso do núcleo (ou seja, onde o núcleo está parado), calcule a velocidade da partícula de matéria escura depois da colisão sabendo que a velocidade típica das partículas de matéria escura que chegam na Terra é da ordem de  $v \simeq 10^{-3}c$ , onde  $c$  é a velocidade da luz. Suponha inicialmente que a colisão aconteça em uma dimensão e que todas as partículas envolvidas (inclusive o núcleo) possam se movimentar livremente;
  - (b) Repita o cálculo do item (a) considerando agora uma colisão em três dimensões. É possível expressar a velocidade final da matéria escura apenas em termos de  $v$  e das massas da matéria escura e do núcleo?
  - (c) Calcule a energia cinética de recuo do núcleo em termos das quantidades relevantes;
  - (d) O que pode ser dito em relação à velocidade da matéria escura depois da colisão no caso  $m_{DM} \ll m_{nucleo}$ ?
  - (e) Os experimentos acima mencionados conseguem detectar experimentalmente apenas energias de recuo do núcleo  $E_{recuo} \gtrsim \text{keV}$ . É verdade que matéria escura com massa qualquer pode dar origem a uma colisão detectável experimentalmente? Considere a colisão

como sendo unidimensional, a massa do núcleo da ordem de 100 GeV e tome o limite  $m_{DM} \ll m_{nucleo}$  para simplificar o cálculo.

- ③ O pêndulo balístico é um dispositivo onde um bloco de massa  $M$ , preso por um haste de massa desprezível, pode girar livremente, sem atrito, em torno de um ponto fixo  $O$ . O dispositivo é usado para determinar a velocidade de impacto de projéteis, que vão parar dentro do bloco. Determine a velocidade de um projétil que colide com o bloco em função da altura na qual o bloco para depois da colisão.
- ④ Considere a colisão elástica de um corpo com uma parede em movimento. Qual a velocidade final do corpo no caso em que (i) a parede está em movimento na mesma direção e sentido do corpo, e (ii) a parede está em movimento na mesma direção mas sentido oposto ao corpo.
- ⑤ Suponha que uma pessoa de massa  $M$  pule de uma altura  $h$  sem movimento horizontal. Suponha também que, quando a pessoa colide com o chão, o centro de massa da pessoa se movimentar para baixo de uma distância  $s$ . Determine:
- (a) a força média durante a colisão, supondo que essa tem duração  $\Delta t$ ;
  - (b) supondo uniforme a força que o chão exerce na pessoa (e portanto a aceleração), escreva a força média em termos de  $s$ ;
  - (c) interprete os resultados achados de acordo com a seguinte pergunta: “durante uma queda, por quê é melhor se agachar o quanto mais possível para reduzir a força do impacto?”
  - (d) Suponha que seu professor (de massa  $M \simeq 70$  kg) pule de uma altura de 1 m, tentando não quebrar o tornozelo. A força que o tornozelo consegue sustentar sem quebrar é da ordem de  $4 \sim 8$  kN (dependendo da idade). Quanto vale a distância  $s$  que garante que o tornozelo não quebre?
- ⑥ Uma estrela em equilíbrio é uma estrela para a qual a pressão gravitacional (que tenderia a causar o colapso) é balanceada pela pressão gerada pelas reações nucleares que acontecem no seu interior. A situação de equilíbrio é sustentada enquanto há combustível nuclear. Quando a pressão das reações nucleares não é mais suficiente para sustentar a

pressão gravitacional, a estrela colapsa e, surpreendentemente, dá origem à explosão de uma supernova. Para entender a física envolvida, vamos modelar as partes externas da estrela como uma bola de massa  $M_1$ , enquanto que o caroço interno será modelado como uma bola de massa  $M_2 \gg M_1$ . A situação é mostrada na Fig. 1. Vamos supor, por simplicidade, que a altura inicial seja  $h$  para as duas bolas (ignoramos os tamanhos), e que a velocidade inicial dos dois corpos seja nula. Calcule a altura final de  $M_1$  supondo que, em primeira aproximação, todas as colisões sejam elásticas. Como você pode usar esse modelo simples para entender a explosão da supernova? (dica: qual o referencial melhor para descrever a colisão entre  $M_1$  e  $M_2$  que acontece depois que  $M_2$  já colidiu com o chão?).

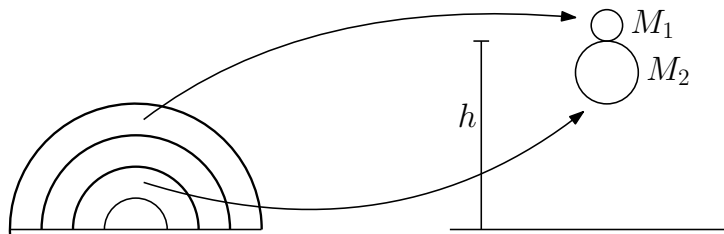


Figura 1: As partes da estrela do exercício ⑥ podem ser modeladas como duas bolas, de massas  $M_1 \ll M_2$ , em queda sob a ação da gravidade.

- ⑦ Considere a colisão *elástica* entre um corpo em movimento com velocidade  $\mathbf{v}$  e um corpo parado com a mesma massa. Mostre que é sempre verdade que, depois da colisão, o ângulo entre as velocidades dos dois corpos é  $90^\circ$ .
- ⑧ O fenômeno de *gravitational slingshot* (estilingue gravitacional) consiste em utilizar o movimento de um planeta de massa  $M$  para modificar – geralmente aumentando – a velocidade de uma sonda espacial de massa  $m \ll M$  que está se movimentando na direção do planeta. Para simplificar, suponha que os movimentos da sonda e do planeta aconteçam no mesmo eixo.
- (a) Convença-se que, dado que estamos interessados nas velocidades da sonda antes e depois do encontro com o planeta, podemos

- descrever o processo como uma colisão, ignorando os detalhes da atração gravitacional entre os dois corpos;
- (b) Dado o item precedente, identifique qual entre os problemas desta lista descreve uma física parecida. Use-o como inspiração para calcular a velocidade final da sonda.
- ⑨ Vimos em aula que várias estrelas estão orbitando o centro da Via Lactea, um local conhecido como Sagitarius  $A^*$ . Uma delas, chamada de S2, tem uma órbita elíptica de grande excentricidade, cujo eixo semi-maior é  $R = 970$  au, onde usamos *unidades astronômicas*, em que  $1 \text{ au} = 1.5 \times 10^{11} \text{ m}$  é a distância média da Terra ao Sol. Observações dessa estrela ao longo de mais de uma década indicam que a órbita de S2 possui um período de aproximadamente 16 anos.
- (a) Apenas utilizando a 3ª Lei de Kepler, estime a massa do objeto em Sagitarius  $A^*$  em unidades da massa do Sol.
- (b) Agora faça um cálculo usando a Lei da Gravitação Universal de Newton. Você pode fazer aproximações com respeito ao movimento de S2. Compare o seu resultado com o resultado do item (a). As duas respostas conferem? Justique.
- ⑩ Considere um sistema planetário com uma estrela sendo orbitada por um único planeta
- (a) Tente demonstrar que, se o planeta executa uma órbita circular, então a estrela também deve seguir uma órbita circular
- (b) Mostre que nesse caso ambos de fato orbitam o centro de massa desse sistema, e que esse fato nem sequer depende da natureza da força gravitacional – basta que a força entre os dois objetos seja uma força *central*.