

Lista de Exercícios IV

To tell us that every species of things is endowed with an occult specific quality by which it acts and produces manifest effects, is to tell us nothing. But to derive two or three general principles of motion from phenomena, and afterwards to tell us how the properties and actions of all corporeal things follow from those manifest principles, would be a very great step in Philosophy, though the causes of those principles were not yet discovered.

(Newton , Optics, citado por French)

- ① Problemas em uma dimensão. Resolva as seguintes equações diferenciais sujeitas às condições iniciais dadas, isto é, encontre o valor da variável como função do tempo que satisfaça as condições iniciais. Os parâmetros ω_0 , k , x_0 , y_0 , v_0 , a_0 e C são constantes. Você verá em cálculo que a solução para essas equações é única!

(a)

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_0, \quad \theta(t=0) = \theta_0$$

(b)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = k, \quad x(t=0) = x_0, \quad \text{e} \quad \frac{dx}{dt}(t=0) = v_0$$

(c)

$$\frac{d^3y}{dt^3} = C, \quad y(t=0) = y_0, \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dt}(t=0) = v_0, \quad \frac{d^2y}{dt^2}(t=0) = a_0$$

Note que você respondeu a quase todos os problemas matemáticos da cinemática do ensino médio. Encontre um exemplo para cada caso, de sistemas encontrados no seu dia a dia que possam ser modelados pelas equações nos casos acima. Caso tenha dificuldades com este problema você deve voltar a olhar o livro de cálculo.

- ② Duas naves da Federação no espaço interestelar, A e B , encontram um objeto não identificado, que no referencial de A tem uma posição $\mathbf{r}_A(t)$, e $\mathbf{r}_B(t)$ no referencial de B . As tripulações estão em contato e trocam informações. O oficial de Ciências a bordo de uma das naves

faz a estimativa que a massa do objeto é M . Também fazem medidas ao longo do tempo das posições do objeto, suficientes para estimar as acelerações do objeto em relação a cada uma das naves, \mathbf{a}_A e \mathbf{a}_B , que se mostram constantes no tempo.

- (a) Qual é o vetor de posição relativa \mathbf{R}_{AB} da nave B com respeito à origem na nave A ?
 - (b) Suponha que $\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B = 0$. Esta informação é suficiente para dizer que o objeto não está acelerando e portanto é um referencial inercial? Antes de responder verifique se as naves estão com seus motores ligados.
 - (c) Suponha agora que $\mathbf{a}_A = 0$, $\mathbf{a}_B \neq 0$. Verifique o estado de funcionamento dos motores. Há quatro casos: (i) ambos motores desligados, (ii) ambos ligados, (iii) A ligado e B desligado e (iv) A desligado e B ligado. Que podem concluir as tripulações em cada caso? Todos os casos são compatíveis com o que sabemos da mecânica?
 - (d) Agora $\mathbf{a}_A \neq 0$, $\mathbf{a}_B \neq 0$. Qual é a força dos motores do objeto que cada tripulação pode calcular usando só a informação de sua aceleração com respeito ao objeto? Mostre que se $\mathbf{a}_A \neq \mathbf{a}_B$ as tripulações chegam a conclusões diferentes. As leis da Física não são as mesmas nas duas naves? Calcule a diferença entre as forças estimadas pelas duas tripulações em função de medidas feitas do vetor de posição relativa \mathbf{R}_{AB} . Note que se você não entende o significado de referencial inercial dificilmente pilotará uma das naves espaciais.
- ③ A teoria da relatividade começou com Galileu. Considere dois sistemas de referências e uma partícula cuja posição é descrita por (x, y, z, t) em um referencial e por (x_0, y_0, z_0, t_0) no outro. A transformação de Galileu é dada por

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t$$

Considere movimento da partícula numa região do espaço onde o potencial só depende da posição e não da sua velocidade.

- (a) Mostre que a segunda lei de Newton tem a mesma forma nos dois referenciais descritos acima.

- (b) Um pessoa, fixa no topo do mastro de um navio deixa cair uma pedra diretamente para baixo. Descreva as trajetórias vistas por uma pessoa parada no barco e outra parada no cais, vendo o barco passar a sua frente.
- (c) Um pessoa, fixa no topo de uma ponte deixa cair uma pedra diretamente encima de um navio que passa. Descreva as trajetórias vistas por uma pessoa parada no barco e outra parada na ponte.
- (d) Se a 2a lei de Newton tem a mesma forma para os dois observadores porque a trajetória descrita não é a mesma?
- ④ Um aluno distraído fez alguns comentários sobre mecânica. Discuta suas afirmações:
- (a) “A primeira Lei de Newton não passa de um caso particular da segunda Lei quando a força é zero”.
- (b) “A segunda Lei é a definição de força”.
- (c) “A terceira Lei de Newton só se aplica para forças de contato”.
- ⑤ Considere o movimento circular uniforme. Encontre a expressão para a aceleração centrípeta em função do raio e do módulo da velocidade. Mostre isso primeiro de forma geométrica e depois usando derivadas. Para essa parte, mostre que a forma paramétrica de um círculo é
- $$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$
- e portanto podemos escrever
- $$\mathbf{r} = r \cos \theta \vec{e}_x + r \sin \theta \vec{e}_y$$
- onde \vec{e}_x e \vec{e}_y são versores (vetores de módulo 1) ao longo da direção crescente dos eixos x e y , respectivamente.
- ⑥ Um martelo atinge um prego com velocidade v , fazendo-o enterrar-se de uma profundidade ℓ numa prancha de madeira. Mostre que a razão entre a força média exercida sobre o prego e o peso do martelo é igual a h/ℓ , onde h é a altura de queda livre do martelo que o faria chegar ao solo com velocidade v . Estime a ordem de grandeza dessa razão para valores típicos de v e ℓ .
- ⑦ Uma criança desliza, para mergulhar dentro de uma piscina, do alto de uma escorregadeira de 3 m de comprimento e 30° de inclinação

com respeito à horizontal. A extremidade inferior da escorregadeira está 3 m acima da água. A que distância horizontal dessa extremidade a criança mergulha na água?

- ⑧ O dispositivo da Fig. 1 gira em torno do eixo vertical com a velocidade angular ω .
- (a) Qual deve ser o valor de ω para que o fio de comprimento ℓ com a bolinha suspensa de massa m faça um ângulo θ com a vertical?
- (b) Qual a tensão T no fio nessa situação?

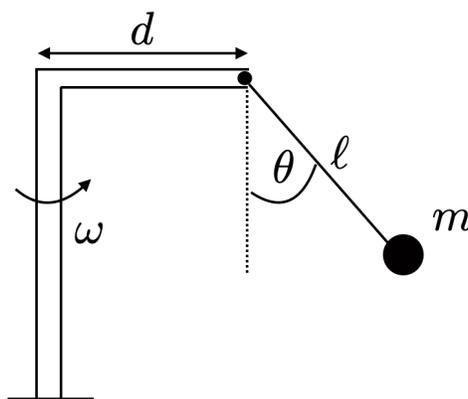


Figura 1: Dispositivo girante.

- ⑨ Um feixe de prótons movendo-se ao longo de uma direção tomada como eixo Ox , com velocidade de 10^6 m/s, penetra numa região onde existe um campo magnético uniforme de intensidade 100 gauss, dirigido ao longo do eixo Oz . Calcule a deflexão do feixe na direção y , após penetrar uma distância de 50 cm ao longo da direção x na região onde existe o campo magnético.
- ⑩ Uma partícula de massa m movendo ao longo de uma linha reta sente uma força de retardamento (uma força que sempre opõe ao movimento) $F = be^{\alpha v}$, onde b e α são constantes e v é a velocidade. Em $t = 0$ a velocidade da partícula é v_0 , encontre a velocidade da partícula em tempos posteriores.