Lista de Exercícios XII

① (Adaptado de N. C. Barford, *Mechanics*, 9.6.3) Compare a energia cinética de um navio de 10^4 toneladas viajando em ritmo de cruzeiro à velocidade de 24 kh/h com a energia cinética de rotação armazenada em sua turbina. Em condições de cruzeiro ela gira a 6000 rotações por minuto e, para efeito de estimativa, pode ser tomada como um cilindro de 2 m de comprimento, 0.5 m de raio e massa de 3 toneladas. A comparação dá uma idéia do potencial de dano em caso de um acidente sério com a turbina.

② Um modelo para uma molécula de quatro átomos iguais é um objeto rígido em que quatro massas iguais m estão localizadas nos vértices de um tetraedro regular cujas arestas têm comprimento $2a$. Num referencial cartesiano em que a origem coincide com o centro de massa do tetraedro e o eixo x é paralelo a uma das arestas da base do tetraedro e o eixo y é paralelo a essa base, as posições das massas $\vec{r}_i \equiv \{x_i, y_i, z_i\}$, i variando de 1 a 4, são

$$\vec{r}_1 \equiv \{-a, -\frac{a}{\sqrt{3}}, -\frac{a}{\sqrt{3}}\},\ \ \vec{r}_2 \equiv \{a, -\frac{a}{\sqrt{3}}, -\frac{a}{\sqrt{6}}\},\ \ \vec{r}_3 \equiv \{0, \frac{2a}{\sqrt{3}}, -\frac{a}{\sqrt{6}}\},\ \ \vec{r}_4 \equiv \{0, 0, \sqrt{\frac{3}{2}}a\}.$$

(É fácil verificar essa informção calculando as coordenadas do centro de massa, que devem ser $\{0,0,0\}$, é claro.)

a) Calcule o tensor (ou matriz) de inércia para êsse sistema:

$$\begin{pmatrix} \sum(y_i^2 + z_i^2) & -\sum x_i y_i & -\sum x_i z_i \\ -\sum y_i x_i & \sum(x_i^2 + z_i^2) & -\sum y_i z_i \\ -\sum z_i x_i & -\sum z_i y_i & \sum(x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix}$$

O resultado deve indicar que para rotação em torno de um eixo *qualquer* que passe pelo centro de massa o momento angular será paralelo à velocidade angular da rotação. Qual é o momento de inércia correspondente?

Considere em seguida o mesmo sistema, agora num referencial cartesiano com origem no ponto médio da aresta paralela ao eixo x do referencial anterior, e eixos paralelos aos eixos correspondentes desse referencial. As novas coordenadas $\vec{r'}_i \equiv \{x'_i, y'_i, z'_i\}$ são

$$\vec{r'}_1 \equiv \{-a, 0, 0\}, \quad \vec{r}_2 \equiv \{a, 0, 0\}, \quad \vec{r}_3 \equiv \{0, \sqrt{3}a, 0\}, \vec{r}_4 \equiv \{0, \frac{a}{\sqrt{3}}, 2\sqrt{\frac{2}{3}}a\}.$$

b) Obtenha as coordenadas do centro de massa e a sua distância ao eixo x. (É fácil verificar o resultado subtraindo as coordenadas do centro de massa das componentes respectivas de cada uma das quatro massa, o que deve levar às coordenadas das massas no referencial com origem no centro de massa dadas acima.)

c) Calcule o tensor (matriz) de inércia neste segundo referencial. Resolva o sistema linear e homogêneo de equações que impõe a condição de que o momento angular seja paralelo à velocidade angular $\vec{\omega'} \equiv \{\omega'_x, \omega'_y, \omega'_z\}$, determinando os momentos principais de inércia e os respectivos eixos. Nesta situação há três momentos de inércia diferentes, e portanto não há ambiguidade na determinação dos três eixos de inércia assosciados à origem deste segundo referencial cartesiano. Procure identificar a posição dos eixos de inércia relativamente à geometria do tetraedro.

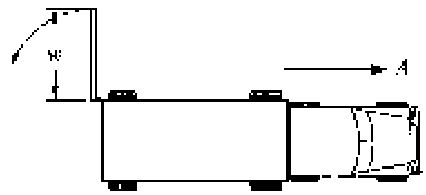
③ **Elevador 'doméstico'.** Como você faria para usar uma balança de banheiro para medir (ou, mais modestamente, para estimar) as acelerações (de partida e de parada, ao subir e ao descer) de um elevador de edifício?

④ (De D. Kleppner e R. J. Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*, Cambridge U. Press, 2010, 8.3) Uma das folhas da porta traseira de um caminhão parado está completamente aberta, como mostrado na figura 1. O caminhão acelera a uma taxa constante A, e a porta começa a girar no sentido de se fechar. Ela é sólida e uniforme, tem massa total M, altura h e largura w. Despreze a resistência do ar.

a) Ache a velocidade angular instanânea da porta em torno das dobradiças no instante em que ela girou de 90°.

b) Ache a força horizontal sobre a porta no instante em que ela girou de 90°.

Figura 1: Figura para o problema **4.**



⑤ (Adaptado de D. Kleppner e R. J. Kolenkow, *op. cit.*) Um pequeno peso de massa m está dependutado por um fio no teto de um automóvel que acelera com taxa A.

a) Qual é o ângulo que o fio faz com a vertical na posição de equilíbrio, e qual é a tensão no fio?

b) Estando o fio na vertical com o carro parado, o carro começa a se mover com aceleração A. Qual é o maior ângulo do qual o fio se afasta da vertical durante a aceleração?

c) Como se comportaria um balão inflado com hélio e segurado por um fio no carro acelerado?

⑥ (De D. Kleppner e R. J. Kolenkow, *op. cit.*, 8.5) Há vária aplicações de giroscópios em sistemas de navegação. Por exemplo, giroscópios podem ser usados para medir aceleração. Consdere um giroscópio girando com uma velocidade ω_s grande. O giroscópioestá ligado a um veículo por um pivô universal P. Se o veículo acelera na direção perpendicular ao eixo de rotação do giroscópio a uma taxa a. então o giroscópio precessa em torno da direção de aceleração, como mostrado na figura 2. O ângulo total da precessão, θ, é medido. Mostre que, se o sistema parte do repouso, a velocidade final do veículo é dada por

$$v = \frac{I_s\omega_s}{Ml}\theta,$$

onde $I_S\omega_s$ é o momento angular de rotação do giroscópio, M é a massa tota pa parte pivotada do giroscópio e l a distancia do pivô ao centro de massa. (Um sistema desse tipo é chamado 'giroscópio integrador', porque integra automaticamente a aceleração para fornecer a velocidade).

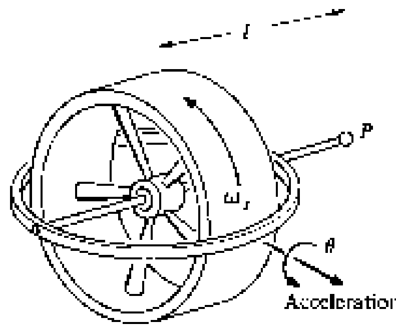


Figura 2: Figura para o problema **6.**

⑦ (De D. Kleppner e R. J. Kolenkow, *op. cit.*, 8.5) A aceleração da gravidade medida em um sistema de coordenadas ligado à terra é denotada como g. No entanto, devido à rotação da terra, g difere da verdadeira acekeração devida à gravidade, denotada como g_0. Supondo que a terra seja perfeitamente esférica, com raio R_t e velocidadwe angular Ω_t, ache g como função da latitude λ. (A suposição de que a terra é esférica na realidade não se justifica, as contribuições para a variação de g com a latitude devidas ao achatamento polar é comparável ao efeito calculado aqui.)

Resp: $g = g_0[1 - (2x - x^2)\cos^2\lambda]^{\frac{1}{2}}$, com $x = R_t\Omega_t^2/g_0$.

⑧ (De D. Kleppner e R. J. Kolenkow, *op. cit.*, 8.9) Um trem de 400 toneladas viaja para o sul com a velocidade de 100 km/h numa latitude de 60º norte.

a) Qual é a força horizontal nos trilhos?

b) Qual é a direção da força?

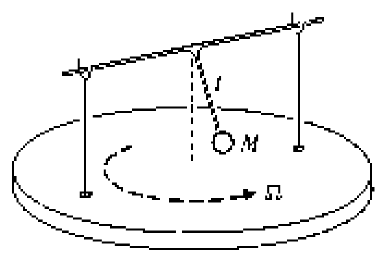


Figura 3: Figura para o problema **9.**

⑨ (De D. Kleppner e R. J. Kolenkow, *op. cit.*, 8.12) Um pêndulo é fixado rigidamente a um eixo que gira livremente sobre dois suportes de forma que o pêndulo só pode oscilar em um plano perpendicular ao eixo (v. figura 3.) O pêndulo consiste de uma massa M presa a uma haste de massa desprezível, de comprimento L. Os suportes estão montados sobre uma plataforma que gira com velocidade angular constante Ω. Ache a frequência dp pêndulo, supondo o limite de pequena amplitude de oscilação.