Lista de Exercícios XI

① (Adaptado de HMN 12.1 a 12.3) **a) Teorema dos eixos perpendiculares.** Prove que o momento de inércia de uma placa delgada plana, de formato arbitrário, relativo a qualquer eixo Oz perpendicular a ela e com origem O no seu plano é igual à soma dos momentos de inércia da mesma placa relativos a dois eixos Ox e Oy, com a mesma origem, perpendiculares entre si e também ao eixo Oz.

b) Calcule o momento de inércia de uma placa delgada retangular, de massa M e lados a e b relativamente a um eixo perpendicular à placa e passando pelo seu centro.

c) Calcule o momento de inércia da mesma placa retangular relativo a um eixo paralelo ao do item **b)** e passando pelo ponto médio do lado de comprimento a.

d) Calcule o momento de inércia de um disco plano delgado de massa M e raio R relativo a um eixo que contém um de seus diâmetros.

e) Calcule o momento de inércia de um anel plano cujos raios externo e interno são R e r respectivamente, obtido recortando um círculo concêntrico de raio r do disco descrito em **d)**. Considere dois casos: i) momento de inércia relativo a um eixo perpendicular a ele e passando pelo seu centro e ii) momento de inércia relativo a um eixo no plano do anel que contém um de seus diâmetros. Verifique o seu resultado obtendo os limites $r \to 0$ e $r \to R$.

② **a)** Um lápis (de comprimento l e massa M) é equilibrado verticalmente sobre uma mesa, sobre a qual acaba caindo sem que sua extremidade inferior deslize. Qual a velocidade do centro de massa do lápis quando ele atinge a mesa?

b) Considere agora a situação (altamente idealizada) em que não há atrito entre o lápis e a mesa. Nesse caso não há forças horizontais agindo, de modo que o centro de massa deve se mover verticalmente. Calcule a velocidade com a qual ele atinge a mesa, e compare com o resultado do item anterior, bem como com o resultado para a queda livre de uma massa puntiforme a partir do repouso em uma altura igual à distância entre a posição inicial do centro de massa e a mesa.

③ **O plano inclinado de Galileu.** Uma esfera maciça de massa M e raio R rola sem deslizar por um plano inclinado, a partir do repouso. O plano inclinado faz um ângulo α com a horizontal.

a) Qual é a relação entre a energia cinética de rotação e a energia cinética de translação durante o movimento?

b) Qual é a velocidade da esfera depois de ela ter percorrido uma distância d rolando sobre o plano? O seu resultado indica que a aceleração do movimento é constante? (Galileu descreveu o resultado de suas observações dizendo que "as distâncias percorridas pela esfera, a partir do repouso, em intervalos de tempo iguais, estão entre si como os números ímpares começando com a unidade"). Qual é a aceleração, em termos dos parâmetros do problema? Ela depende do raio e da massa da esfera?

c) Se forem usadas, nas mesmas condições acima, duas esferas de mesmo raio e de mesma massa, mas de materiais diferentes, de modo que uma seja oca e a outra maciça, qual das duas chegará antes ao pé do plano?

④ **'Pêndulo rolante'.** Um cilindro maciço de massa M e raio R rola sem deslizar oscilando, sob a ação de seu peso, sobre o interior de uma superfície também cilíndrica, de raio $l + R$. O eixo do cilindro rolante e o da superfície sobre a qual ele rola são paralelos e horizontais. Ignorando efeitos de dissipação, compare o período das oscilações do cilindro rolante com o período das oscilações de um pêndulo simples de comprimento l que oscila com a mesma amplitude. **Sugestão:** Isso pode ser feito sem calcular efetivamente os períodos e independentemente de aproximações de pequena amplitude para as oscilações, comparando, por exemplo, expressões para velocidade como função do afastamento do ponto de equilíbrio para os dois sistemas. **Talvez a propósito:** No Livro 3 dos *Principia* Newton escreveu

> Others have long since observed that the falling of all heavy bodies toward the earth (at least on making adjustment for the inequality of the retardation that arises from the very slight resistance of the air) takes place in equal times, and it is possible to discern that equality of times, to a very high degree of accuracy, by using pendulums.

e, no Livro 2, a Proposição 24 diz

> In simple pendulums whose centers of oscillation are equally distant from the center of suspension, the quantities of matter are in a ratio compounded of the ratio of the weights and the squared ratio of the times of oscillation in a vacuum.

Para mais informação: veja aqui

⑤ (De N. C. Barford, *Mechanics*, 9.3) Um bloco sólido com a forma de um paralelepípedo retangular de lados $2a_1$, $2a_2$ e $2a_3$ pode balançar livremente em torno de um eixo situado ao longo de um dos lados de comprimento $2a_3$.

a) Qual é o comprimento do pêndulo simples equivalente?

b) O bloco é colocado na posição em que os lados $2a_1$ estão horizontais com o centro de massa acima do eixo de rotação e liberado para cair. Êsse procedimento é repetido, mas agora a partir de uma posição em que o centro de massa está abaixo do eixo de rotação. Mostre que a razão entre as velocidades angulares máximas que ocorrem nos dois casos é $[(a_1^2+a_2^2)^{1/2}+a_2]^{1/2}/[(a_1^2+a_2^2)^{1/2}-a_2]^{1/2}$.