

Universidade de São Paulo

Uma introdução ao Mathematica

Autor: Gustavo Alves

Contents

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | O que é o Mathematica ? | 1 |
| 2 | Instalação: | 1 |
| 2.1 | Criando seu Wolfram ID: | 1 |
| 2.2 | Licença: | 1 |
| 2.3 | Como instalar: | 2 |
| 3 | Primeiro contato - “Free Form Input”: | 3 |
| 4 | Utilizando a linguagem de programação do Mathematica: | 6 |
| 4.1 | Usando a célula como calculadora e uma primeira função: | 7 |
| 4.2 | Como fazer derivadas: | 8 |
| 4.3 | Como resolver integrais definidas e indefinidas: | 8 |
| 4.4 | Como construir gráficos: | 9 |
| 4.4.1 | Utilizando o Manipulate: | 10 |
| 4.5 | Definindo Funções: | 11 |
| 4.6 | Como resolver equações diferenciais: | 12 |
| 4.7 | Conclusão: | 12 |
| 4.8 | Exercícios | 13 |
| 5 | Documentação e auxílio: | 14 |
| 6 | Projeto (opcional): A Braquistócrona | 14 |

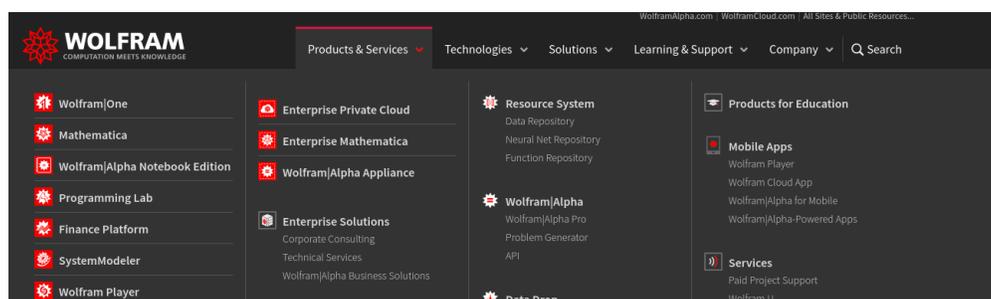
1 O que é o Mathematica ?

Utilizado em diversas áreas como química, biologia, matemática e física, o Mathematica vai além de uma linguagem de programação. Como vocês verão além da implementação simples, que permite o usuário que nunca utilizou o software começar a fazer cálculos e desenvolver pequenos programas rapidamente, o Mathematica conta também com uma vasta biblioteca de dados, imagens, sons, dentre outras, como visualização 3D de moléculas e até dados específicos de diversos países/cidades.

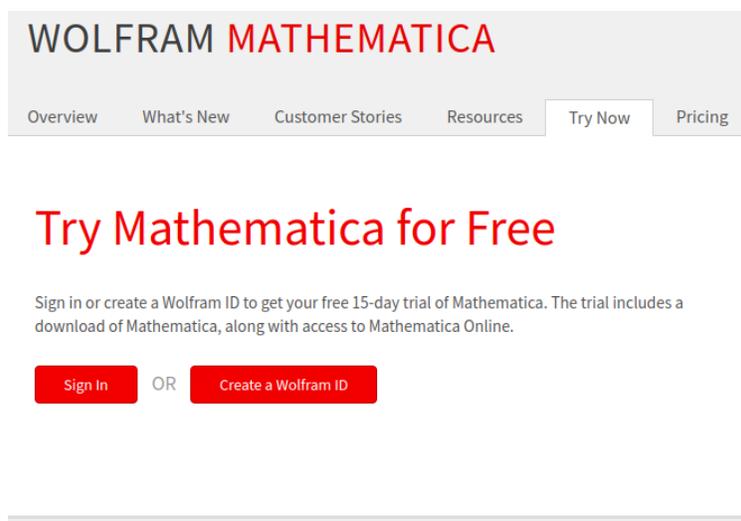
2 Instalação:

2.1 Criando seu Wolfram ID:

Acesse o seguinte site: [Wolfram](https://wolfram.com). Vá na aba produtos e serviços e clique em Mathematica:



Clique em experimentar agora e crie seu Wolfram ID (**Utilize seu email USP**):



2.2 Licença:

Alunos da USP tem direito a uma licença por número USP. Para solicitar a sua é necessário acessar: [Licença Mathematica](#)

Na tela que aparece clique no link [Sistema GLISE - Gerenciador de Licenças de Software](#) e será redirecionado para a página de login. Ao encontrar a seguinte tela:

Login

Usuário

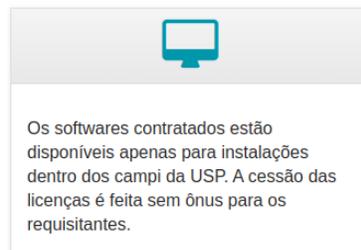
Senha

Entrar

[Esqueci Minha Senha Única USP](#)

[Como recuperar a senha única](#)

Entre com o número USP e a senha única (a mesma que dá acesso ao sistema Júpiter), em seguida basta selecionar:



Na página seguinte é possível ver todos softwares que um aluno da USP pode requisitar uma licença grátis. Selecione o Mathematica na versão mais recente e adequado ao seu sistema operacional, preencha o restante e clique em prosseguir:

Solicitar Software

Voltar

* Campos obrigatórios

Software * Mathematica 12.0 - Linux

Unidade * IF

Nro. USP * Nome *

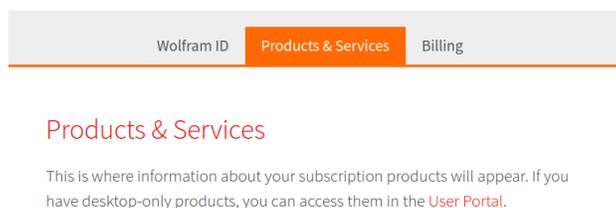
E-Mail *

Prosseguir

Pronto! Você irá receber as instruções no email.

2.3 Como instalar:

Agora, em posse da licença e com uma conta associada a seu email USP, faça login no [site](#) vá em produtos e serviços:



Clique em portal do usuário e você será redirecionado para a página com os downloads disponíveis:

| My Products and Services | | | | | | | |
|--|---------|----------|----------------|--------------------|-------------------------|-------------------------------|----------|
| Product | Version | Platform | License Number | License Expiration | Service Plan Expiration | Downloads | Reminder |
| Mathematica for Sites » | 11.3.0 | All | 2983-5416 | 01-APR-2020 | 01-APR-2020 | Get downloads | |
| Mathematica for Students for Sites » | 12.0.0 | All | 3288-4774 | 01-APR-2020 | 01-APR-2020 | Get downloads | |

Selecione “Get Downloads” na opção “For students”. Você será redirecionado para a página onde pode ver sua licença:

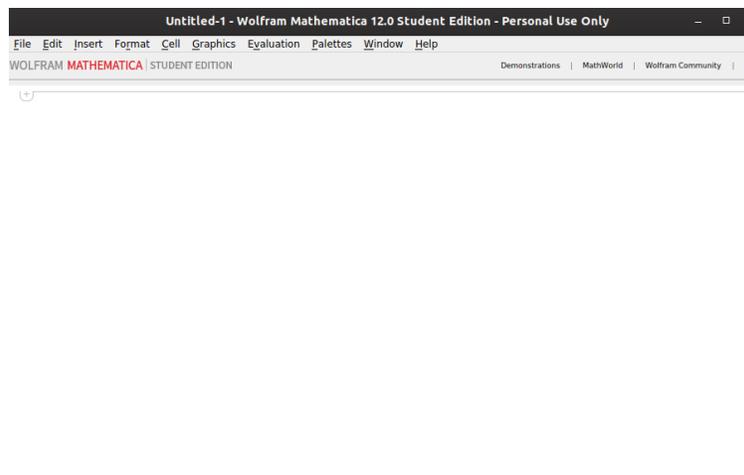
| Activation Keys | | | | |
|------------------|-------------------------------------|---------|--------|-----------------|
| Activation Key ? | Deactivate | Version | Status | Expiration Date |
| | <input checked="" type="checkbox"/> | 12.0.0 | Active | |

E o download da versão correspondente pode ser feito na seguinte janela:

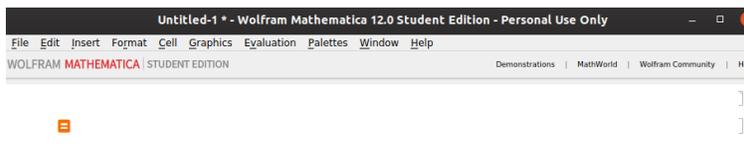
| Downloads | | | | |
|--|---------|-------------------|--------------------------|--|
| Current Version | | Previous Versions | | |
| Product Name | Version | Platform | | |
| Mathematica Download Manager | 12.0.0 | Macintosh | Download | |
| Mathematica Download Manager | 12.0.0 | Windows | Download | |
| Mathematica Direct Download (optional) | 12.0.0 | Macintosh | Download | |
| Mathematica Direct Download (optional) | 12.0.0 | Windows | Download | |
| Mathematica | 12.0.0 | Linux | Download | |

3 Primeiro contato - “Free Form Input”:

Para apreciar o poder do Software, antes de entrar em detalhes sobre sua estrutura, vale a pena discutir sobre o “Free Form Input”. Esse é um modo do Mathematica que permite acessar parte de seu arcabouço de ferramentas sem saber a estrutura necessária para programar as mesmas. Ao abrir um Notebook do Mathematica você irá se deparar com a seguinte tela:

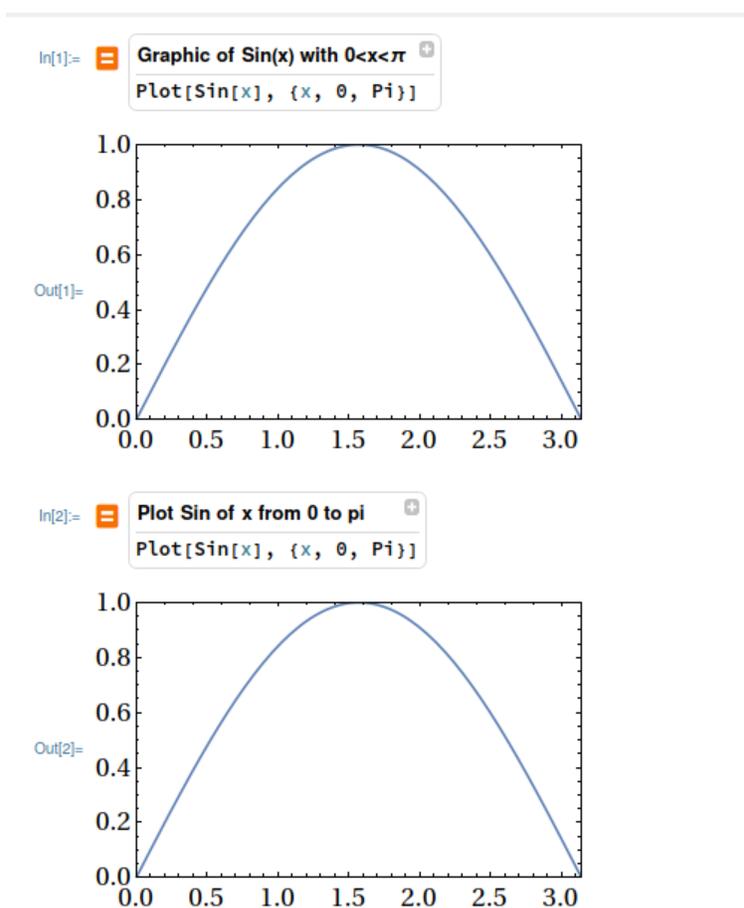


Essa é a área onde você irá escrever seu programa. Ao clicar na parte branca irá aparecer um cursor piscando na horizontal, indicando onde você está escrevendo. Se olhar na mesma linha na direita notará que um colchete apareceu, ele indica a estrutura básica do Mathematica chamada célula, todos comandos que forem escritos dentro de uma célula serão executados ao mesmo tempo. Para acessar o modo de “Free Form Input”, aperte o sinal de “=” e tecle espaço, irá aparecer o seguinte símbolo:



Uma vez nesse modo, tudo que quiser que o Mathematica execute pode ser ordenado apenas escrevendo em inglês, exemplos servem melhor o propósito de mostrar o poder desse modo (Obs: como o “Free Form Input” utiliza a base de dados do Mathematica para executar os comandos é necessário ter conexão com a internet):

- Criando o gráfico da função seno no intervalo de 0 a π . **Após digitar a frase basta apertar Shift + Enter para executar a célula** (note que o Mathematica reconhece o que é pedido mesmo se as sentenças forem diferentes).



- Calculando a derivada da função cosseno:

```
Derivative of Cosine of x
D[Cos[x], x]
-Sin[x]
```

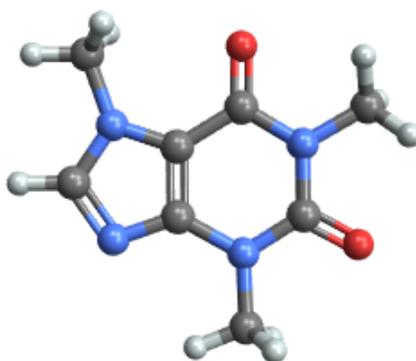
Algumas sugestões aparecerão uma vez que o comando for executado, permitindo novas ações em cima do resultado obtido. Note ainda que o comando, na linguagem de programação do Mathematica aparecerá como resultado dentro da caixa onde foi digitado a frase, tornando esse modo uma fonte de estudo caso tenha dúvidas a respeito de uma função na linguagem do software.

- Integral de 0 à π da função exponencial:

```
Integrate exp(x) from 0 to pi
Integrate[Exp[x], {x, 0, Pi}]
-1 + e $\pi$ 
```

- Apenas para mostrar a extensão da base de dados do Wolfram você pode brincar de pedir sentenças mais “exóticas” como por exemplo:

```
Caffeine Molecule 3D
caffeine CHEMICAL [ molecule plot ]
```



 **Picture of Albert einstein** » 
Albert Einstein PERSON [image]



 **Dollar cotation** » 
↩ **dollar** ?
↳ Local currency conversion for \$1 (US dollar)

R\$4.27 (Brazilian reais) (31.01.2020)

 **Age of the Universe in seconds** » 
↳ Result
 4.3×10^{17} s

4.3×10^{17} s

Como será visto no próximo capítulo, além dessas funcionalidades, a facilidade de programar no Mathematica o torna tão atrativo.

4 Utilizando a linguagem de programação do Mathematica:

Como dito anteriormente, a estrutura básica do Mathematica é chamada célula. Um programa nesse software é separado em blocos de células que devem ser executadas uma a uma. Quando o cursor é posicionado em um Notebook e ele fica na horizontal indica que uma nova célula foi criada e está pronta para ser utilizada. O básico da sintaxe do Mathematica é que as funções do próprio software sempre **iniciam** com **letra maíuscula**, colchetes são utilizados para identificar os argumentos da função e chaves são utilizadas para listas. Entendendo essa divisão e olhando no capítulo anterior podemos notar como escrever, de maneira compreensível ao Software, funções básicas como integrais e derivadas que, juntas à função que permite construir gráficos, serão o foco desse material.

4.1 Usando a célula como calculadora e uma primeira função:

Todas células do Mathematica podem ser utilizadas como calculadora de maneira explícita, cálculos simples como divisão podem ser feitos utilizando o sinal “/”, ou ainda, para os que gostam de atalhos de teclado, apertando “Ctrl + /” é possível escrever a divisão em uma forma mais estética, para multiplicação o Mathematica entende tanto o sinal “*” quanto um espaço entre os números a serem multiplicados:

10 / 5

2

$\frac{10}{5}$

2

7 / 5

$\frac{7}{5}$

5 * 4

20

5 × 4

20

Note que na fração $\frac{7}{5}$ o Mathematica retornou o resultado exato e não uma aproximação. Caso a fração explícita, como em muitos casos, não seja de interesse do autor do programa, podemos utilizar a função N que aproxima o a fração em questão. Seguindo as regrinhas básicas ditas no início da seção, essa função é chamada N e tem como argumento a expressão que deve ser aproximada. Mais detalhes sobre ela podem ser obtidos no assistente do Mathematica, que pode ser acessado tanto procurando direto na internet ou apertando “F1”. **Dica: Selecionando com o mouse a função e apertando “F1” leva automaticamente à seção dela no assistente do Software.**

N[7 / 5]

1.4

O mesmo resultado poderia ser obtido trocando o 5 ou o 7 por 5. ou 7.. A função N pode ainda levar como argumento o número de casas decimais que se deseja de precisão, procure no assistente do Mathematica como fazer isso. Além de utilizar diretamente os números é possível atribuir valores à variáveis utilizando o sinal “=”, uma vez associado um valor à uma letra ou palavra ela pode ser utilizada como se fosse do tipo de seu valor atual:

```
a = 4
4
4 + a
8
a * 3
12
a * a
16
```

4.2 Como fazer derivadas:

A função derivada, denotada pela letra D, tem como argumentos obrigatórios a função que será derivada e a variável na qual a derivada irá agir:

```
D[Cos[x], x]
-Sin[x]

D[Log[Cos[xis]], xis]
-Tan[xis]

D[Cos[k]^2, k]
-2 Cos[k] Sin[k]
```

Obs: Note que as funções seno (no Mathematica Sin[]), cosseno (no Mathematica Cos[]), etc, seguem as mesmas regrinhas de anteriormente. Potências podem ser calculadas utilizando tanto o sinal “^” quanto apertando “Ctrl + 6” e escrevendo a potência desejada no quadrado que irá aparecer em cima do objeto.

Há ainda a opção de se derivar mais de uma vez a mesma função, para isso basta fornecer, ao invés de uma variável, uma lista indicando a variável na qual a função será derivada e o número de vezes:

```
D[x^9, {x, 2}]
72 x^7

D[x^9, {x, 9}]
362880
```

4.3 Como resolver integrais definidas e indefinidas:

A função para realizar integraiss, tanto indefinidas como definidas, é Integrate[] e recebe como argumentos a função e a variável de integração, caso deseje fazer a integral definida é preciso passar uma lista do tipo $\{x, x_{min}, x_{máx}\}$, definindo assim a variável e os limites:

Integrate[Sin[x], x]

-Cos[x]

Note que o Mathematica não escreve a constante de integração, isso é apenas para simplificar o resultado exibido. Um exemplo para integrais definidas:

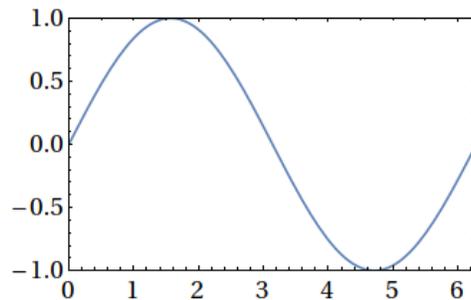
Integrate[Sin[x] e^x, {x, 0, π}]

$\frac{1}{2} (1 + e^{\pi})$

4.4 Como construir gráficos:

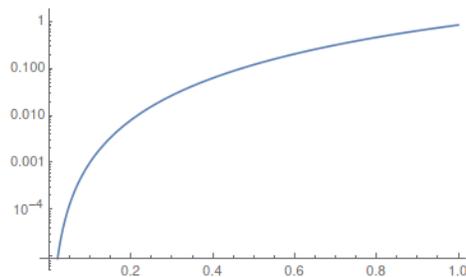
Até o presente momento estamos utilizando apenas funções prontas do Mathematica, nas próximas seções será abordado como definir funções próprias caso haja necessidade, de qualquer forma a função para plotar gráficos funciona para ambas. A função é chamada Plot[] e leva como argumentos obrigatórios a função a ser plotada e uma lista indicando a variável associada ao eixo “x” e os limites do gráfico.

Plot[Sin[x], {x, 0, 2 π}]

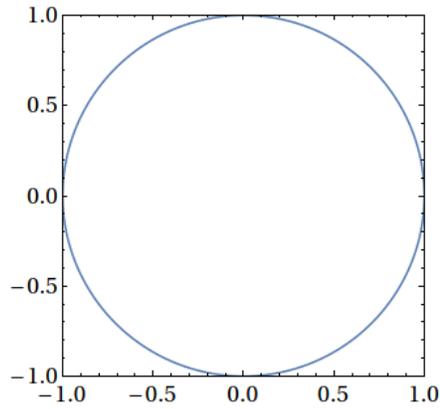


É possível criar diferentes formatos de gráficos, mudar escalas, gerar plots paramétricos, dentre outros, com sintaxes bem similares. Encorajamos novamente que o aluno leia e explore as referências do software e tente mudar parâmetros, cores, textura, etc. Seguem algumas opções:

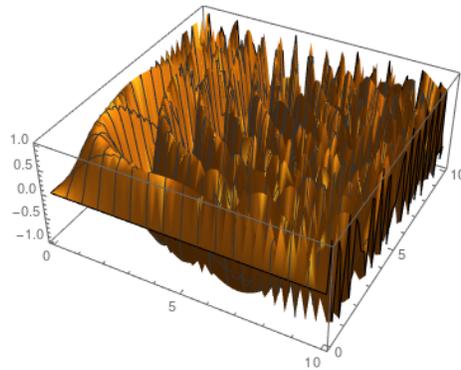
LogPlot[x² Sin[x], {x, 0, 1}]



```
ParametricPlot[{Sin[t], Cos[t]}, {t, 0, 2 Pi}]
```



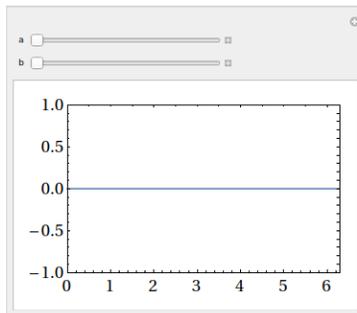
```
Plot3D[Sin[x y], {x, 0, 10}, {y, 0, 10}]
```

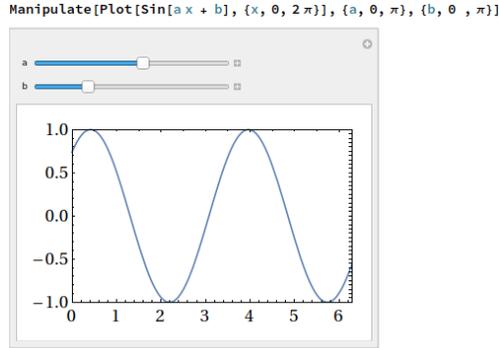


4.4.1 Utilizando o Manipulate:

Uma função muito interessante que pode ser associada à diversas outras é o `Manipulate[]`, em especial é comum utilizar essa ferramenta junto à função `Plot[]`. O `Manipulate[]` recebe como parâmetros uma função a ser manipulada e uma lista, ou mais, se necessário, contendo variáveis e os limites onde serão avaliados. Essa ferramenta é extremamente poderosa e tem um grande poder pedagógico.

```
Manipulate[Plot[Sin[a x + b], {x, 0, 2 Pi}], {a, 0, Pi}, {b, 0, Pi}]
```





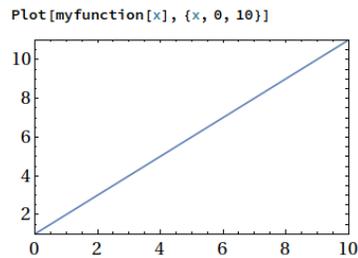
Essa função pode ser utilizada para criar modelos interativos, simulações de situações físicas e até, quando associada ao poder gráfico do Mathematica, representar com desenhos a evolução de sistemas mais complexos, para os interessados clique no link seguinte para ver exemplos dos projetos de [demonstrações do Wolfram utilizando o Mathematica](#)

4.5 Definindo Funções:

Além das funções do Software como Seno e Cosseno, é possível definir funções próprias combinando funções prontas. A sintaxe consiste no nome da função com seu argumento indicando sua dependência, sendo que as variáveis devem ser completadas com o sinal “_” e então, para indicar que essa é uma definição de função, utiliza-se o sinal “:=” e em seguida a regra associada a função:

```
myfunction[variable_] := variable + 1
```

Uma vez definida a função ela pode ser utilizada como qualquer outra:



```
D[myfunction[x], x]
```

```
1
```

```
Integrate[myfunction[x], x]
```

$$x + \frac{x^2}{2}$$

```
Integrate[myfunction[x], {x, 0, 10}]
```

```
60
```

Uma boa prática é utilizar letras minúsculas para funções próprias para diferenciar das funções do software. Além disso, note que há grande liberdade para escolha do nome da variável e da função, apenas alguns sinais e nomes associados à constantes ou funções já definidas são proibidos.

4.6 Como resolver equações diferenciais:

O Mathematica também pode ser utilizado para resolver equações diferenciais de maneira bem prática. A função é denotada por `DSolve[]` e leva como argumentos uma lista contendo a equação e, se estabelecidas, as condições iniciais, uma função e a variável. Alguns cuidados devem ser tomados, na equação diferencial derivadas são denotadas por “ ’ ” e na igualdade deve ser utilizado “ == ” ao invés de “ = ” que é utilizado para atribuir valores à variáveis:

$$\text{DSolve}[\{f'[x] = x\}, f[x], x]$$
$$\{\{f[x] \rightarrow \frac{x^2}{2} + c_1\}\}$$

Como não fornecemos as condições iniciais o Mathematica adicionou uma constante de integração. Note a diferença quando a condição inicial é fornecida:

$$\text{DSolve}[\{f'[x] = x, f[1] = 2\}, f[x], x]$$
$$\{\{f[x] \rightarrow \frac{1}{2} (3 + x^2)\}\}$$

A generalização para derivadas de ordem superior é direta:

$$\text{DSolve}[\{f''[x] + \omega^2 f[x] = 0\}, f[x], x]$$
$$\{\{f[x] \rightarrow c_1 \text{Cos}[x \omega] + c_2 \text{Sin}[x \omega]\}\}$$

$$\text{DSolve}[\{f''[x] + \omega^2 f[x] = 0, f[0] = 0, f'[0] = 1\}, f[x], x]$$
$$\{\{f[x] \rightarrow \frac{\text{Sin}[x \omega]}{\omega}\}\}$$

Essa equação acima descreve o movimento harmônico simples e será abordado extensivamente, não só no primeiro ano do curso de física, como voltará em diversos cenários desde cursos de Mecânica clássica, Mecânica Quântica e até Teoria Quântica de Campos. Nas palavras de **Sidney coleman**:

“The career of a young theoretical physicist consists of treating the harmonic oscillator in ever-increasing levels of abstraction”

4.7 Conclusão:

O conteúdo abordado nesse tutorial, apesar de introdutório, serve de base para o estudante que nunca teve contato com o Mathematica antes, ou com qualquer outra linguagem de programação, sair do zero para um ponto onde consiga fazer o básico, que de certo modo já é bastante, de maneira rápida e eficiente.

4.8 Exercícios

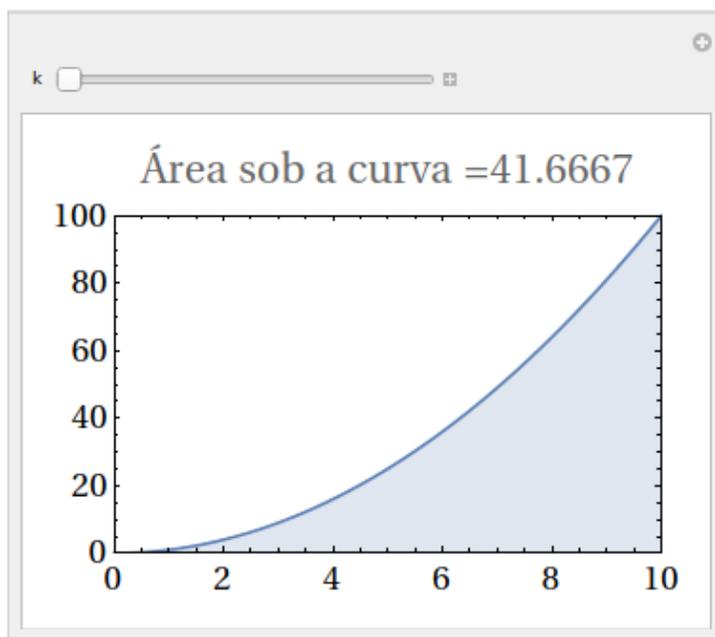
Os exercícios a seguir são, pelo menos a maioria, simples. A próxima seção contém referências com problemas mais refinados.

1. Calcule a primeira e segunda derivada das funções:

- (a) $e^{\sin(x)}$
- (b) $\cos(\log(x))^2$
- (c) $\arctan(x)$

2. Calcule a integral das seguintes funções:

- (a) $\sin x + 3x^2 + 9$
- (b) e^{-x^2} para $-\infty \leq x \leq \infty$
- (c) Para ilustrar o conceito da integral como uma área sobre a curva faça os seguintes passos:
 - i. Construa os gráficos das funções: x e $-x + 10$
 - ii. Calcule a integral da função x no intervalo $0 \leq x \leq 5$ e da função $-x + 10$ no intervalo $5 \leq x \leq 10$
 - iii. Procure no assistente do Mathematica informações de como construir uma função por partes. Procure por “Piecewise”, construa o gráfico da união das duas funções acima em seus respectivos intervalos.
 - iv. Utilizando a função Manipulate construa o gráfico da função definida por partes deixando o limite superior do segundo intervalo como uma variável a ser manipulada nos limites apropriados.
 - v. Procure no assistente do Mathematica como preencher abaixo do gráfico e como incluir legendas.
 - vi. Feito isso coloque uma legenda que te forneça a área sob a curva conforme varia o parâmetro livre da função Manipulate. Um exemplo de Output é:



3. Resolva as equações diferenciais:

(a) $\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - 12y = 0$

(b) $\frac{dW}{dl} + kW = 100k$

(c) $\frac{dy}{dx} = x^3y^2$

(d) $y'_x{}^2 = e^x$ com $y(0) = 4$

(e) $y'' - 2y' + 3x - 7 = -\sin(x)$ com $y'(2) = 3$, $y(0) = 3$

4. Defina a função $\cos(\omega x + b)$ e utilize o `Manipulate` para criar um gráfico onde possa visualizar como a função muda ao variar ω e b .

5. Defina a função e^{e^x} e calcule a terceira derivada em x .

Mais exercícios e problemas podem ser encontrados nos livros indicados na próxima seção. Esses acima servem apenas para checar os pontos básicos do texto. Além das fontes mencionadas, encorajamos que os alunos, após terem feito os exercícios de listas à mão, tente conferir/refazer as contas no Mathematica.

5 Documentação e auxílio:

Seguem algumas recomendações que serviram de base para esse tutorial:

- O livro [Hands-on Start to Wolfram Mathematica and Programming with the Wolfram Language, Second Edition](#) é o mais simples e prático para sair do zero para um conhecimento intermediário/avançado do Mathematica. Existem volumes disponíveis para alugar na biblioteca da física.
- O assistente online do Mathematica está disponível também na web nesse [site](#).
- Existem diversos livros de técnicas do Mathematica exclusivamente aplicados à física. Esses livros são mais avançados conceitualmente e nem sempre são muito didáticos, a leitura em paralelo com o item 1 é recomendada.
 1. [A Physicist's Guide to Mathematica](#)
 2. [The Mathematica Book, Fifth Edition](#)
 3. [Mathematica for Physics \(2nd Edition\)](#)

6 Projeto (opcional): A Braquistócrona

Será disponibilizado um Notebook com o problema da Braquistócrona, aos interessados o seguinte [trabalho](#) fala sobre a história, discute o problema e mostra diversas situações onde a mesma questão é levantada.