Lista de Exercícios V

Ondas gravitacionais

1. Considere a seguinte pertubação do espaço-tempo:

$$h_{\mu\nu} = -(\partial_\mu \zeta_\nu + \partial_\nu \zeta_\mu),$$

com

$$\zeta_\mu = c_\mu e^{-ik\cdot x}, \qquad k^2 = 0.$$

Quanto vale o tensor de Riemann? Qual a interpretação deste resultado?

2. Considere uma onda gravitacional em movimento na direção z positiva. Como transformam as polarizações $h_\times$ e h_+ ao aplicarmos uma rotação de um ângulo ψ entorno di eixo z? (Dica: lembre-se como as rotações em três dimensões atuam em tensores). O mesmo cálculo pode ser repetido para o 4-potencial A_μ do eletromagnetismo. Quais as diferenças respeito ao caso das ondas gravitacionais?

3. Considere a ação de Fierz-Pauli

$$S_{FP} = -\frac{1}{8\pi G}\int d^4x \left[-\frac{1}{4}(\partial_\rho h_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{2}\partial_\rho h_{\mu\nu}\partial^\nu h^{\rho\mu} + \frac{1}{4}\partial_\mu h \partial^\mu h \right.$$
$$\left. -\frac{1}{2}\partial_\nu h^{\mu\nu}\partial_\mu h + h_{\mu\nu}T^{\mu\nu} \right],$$

onde $h = h^\mu{}_\mu$ é o traço da perturbação da métrica. Calcule as equações de movimento para $h_{\mu\nu}$ e mostre que o resultado é precisamente aquele obtido linearizando as equações de Einstein.

4. Considere a onda gravitacional gerada por um sistema binário,

$$\bar{h}_{ij} = -\frac{2GM\omega^2R^2}{r}\begin{pmatrix} \cos(2\omega t_{ret}) & \sin(2\omega t_{ret}) & 0 \\ \sin(2\omega t_{ret}) & -\cos(2\omega t_{ret}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcule todas as outras componentes de $\bar{h}_{\mu\nu}$ no gauge TT.

Espaços maximamente simétricos
(Dica: para resolver os exercícios seguintes, use o programa que você desenvolveu nas listas antecedentes para o cálculo simbólico do tensor de Ricci)

1. Mostre que o espaço-tempo de Schwarzschild NÃO É maximamente simétrico;

2. É verdade que o espaço-tempo de Kerr (isto é, gerado por um buraco negro com momento angular) é maximamente simétrico?

3. Vimos nas aulas que o escalar de Ricci de uma esfera 3-dimensional é dado por
$$R = \frac{6}{a^2},$$
onde a é o raio da esfera definito por $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = a^2$. Mostre que este resultado é verdadeiro;

4. Repita o exercício do item antecedente para o caso da hipérbole 3-dimensional definida por $x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = a^2$

Cosmologia

1. Quanto vale o escalar de Ricci para a métrica FRW escrita em termos das coordenadas comoventes "esféricas" $(\bar{r}, \theta, \varphi)$,
$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left[\frac{d\bar{r}^2}{1 - k\bar{r}^2} + \bar{r}^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right]?$$

2. Mostre explicitamente que a parte espacial da métrica de FRW pode ser escrita em coordenadas cartesianas como
$$g_{ij} = \delta_{ij} - k\frac{x_i x_j}{1 - k\boldsymbol{x}^2}.$$

3. A expressão para a pressão de um sistema de partículas é dada por
$$p = \left\langle \sum_a \frac{\boldsymbol{p}_a^2}{3E_a}\delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{q}_a(\tau)) \right\rangle,$$
onde $\boldsymbol{p}_a$ e E_a são o 3-momento e a energia da partícula a. Vamos agora mostrar que a expressão $\boldsymbol{p}_a^2/(3E_a)$ corresponde, de fato, a uma pressão:

a) Considere várias partículas em movimento ao longo da direção horizontal. Algumas delas espalham numa parede de forma completamente elástica. Quantas partículas espalham na parede por unidade de tempo? Expresse seu resultado em termos do momento das partículas na situação idealizada em que todas as partículas estão em movimento com a mesma velocidade. Considere também isotropia no movimento (isto é, tantas partículas estão em movimento em um sentido quantas no sentido oposto);

b) Por definição, a pressão é dada pela variação do momento na direção horizontal por unidade de tempo e de superfície. Dada a situação do item antecedente, quanto vale a pressão na parede?

c) Use agora a isotropia na forma $p_i^2 = \boldsymbol{p}^2/3$ (onde p_i denota qualquer uma das componentes do momento) para derivar o resultado desejado $p = \boldsymbol{p}^2/(3E)$.

4. Em Cosmologia, o conteúdo de matéria do universo é modelado como um fluido perfeito, ou seja, seu tensor de energia-momento é

$$T^{\mu\nu} = -pg^{\mu\nu} + (\rho + p)u^\mu u^\nu.$$

onde $U^\mu = (1, 0, 0, 0)$. Além disso, temos uma equação de estado dada por $p = w\rho$[1].

a) Usando este modelo na métrica FLRW, use as equações de Einstein para encontrar as equações de Friedmann, que descrevem a evolução do fator de escala.

b) Mostre que, para partículas ultra-relativísticas (radiação), temos $w = 1/3$ e para partículas não relativísticas (poeira), $w = 0$. Use as expressões para densidade de energia e pressão derivadas anteriormente.

c) Conclua dos itens anteriores que um universo apenas com poeira e radiação não pode ter expansão acelerada.

d) Mostre que $\mathcal{L}_M = -\frac{\Lambda}{8\pi G}$ gera um tensor de energia momento com $w = -1$. Λ é chamada de constante cosmológica. É fácil ver pelo item anterior que um termo deste tipo gera uma expansão

[1]Para uma motivação desse modelo de fluído perfeito, veja `www.youtube.com/watch?v=fRxGsRN2rV4`

acelerada do universo. Chamamos esse tipo de matéria de energia escura e esta corresponde a 75% da energia total do universo.

e) Mostre como as respectivas densidades de cada tipo de matéria evoluem com o fator de escala (Dica: use que o tensor de energia-momento é covariantemente conservado). Em especial, mostre que a energia escura tem densidade constante ao longo da evolução do universo.