Lista de Exercícios IV

Ação de Einstein-Hilbert (2)

1. Vimos nas aulas que a seguinte identidade de Palatini
$$\delta R_{\alpha\beta} = D_\mu \delta\Gamma^\mu_{\alpha\beta} - D_\beta \delta\Gamma^\mu_{\alpha\mu}, \tag{1}$$
o termo proporcional à $\delta R_{\alpha\beta}$ não contribui às equações de movimento. Para provar a identidade de Palatini:
   (a) mostre que a variação dos símbolos de Christoffel $\delta\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ é igual a
   $$\delta\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} \left[D_\alpha \delta g_{\beta\rho} + D_\beta \delta g_{\alpha\rho} - D_\rho \delta g_{\alpha\beta} \right];$$
   (b) usando a expressão antecedente, se convença que é verdade que, ao contrário dos símbolos de Christoffel, a variação $\delta\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ é um tensor de tipo $(1, 2)$;
   (c) Usando a definição
   $$\delta R_{\alpha\beta} = \delta R^\mu{}_{\alpha\mu\beta}$$
   e a expressão do tensor de Riemann em termos dos símbolos de Christoffel, mostre a validez da identidade de Palatini.

2. A identidade de Bianchi é dada por
$$D_\nu R_{\rho\mu\sigma\lambda} + D_\sigma R_{\rho\mu\lambda\nu} + D_\lambda R_{\rho\mu\nu\sigma} = 0.$$
Prove essa identidade (dica: use o fato que é sempre possível escolher localmente um sistema de coordenadas "plano" e depois generalize o resultado).

Desvio Geodésico

Neste exercício, iremos derivar a equação de desvio geodésico, um resultado que dá motivação para a curvatura como a responsável pelo efeito de "força" gravitacional. Comecemos considerando duas geodésicas x^μ e $\tilde{x}^\mu$ próximas, de tal forma que a diferença entre as duas,
$$\xi^\mu(\lambda) = \tilde{x}^\mu(\lambda) - x^\mu(\lambda),$$
pode ser considerada pequena.

a) Usando o fato acima e lembrando que

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x+\xi) = g^{\mu\nu}(x) + \partial_\rho g_{\mu\nu}(x)\xi^\rho + \mathcal{O}(\xi^2),$$

mostre que

$$\tilde{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta} = \Gamma^\mu_{\alpha\beta} + \partial_\rho \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\xi^\rho + \mathcal{O}(\xi^2).$$

b) Usando o resultado acima e lembrando que tanto x quanto $\tilde{x}$ são geodésicas, mostre que

$$\ddot{\xi}^\alpha + \partial_\rho \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma \xi^\rho + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\dot{x}^\beta \dot{\xi}^\gamma + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\dot{x}^\gamma \dot{\xi}^\beta = 0.$$

c) Agora, convença-se de que essa equação é equivalente à

$$\frac{d}{d\lambda}(\dot{\xi}^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\dot{x}^\gamma \xi^\beta) - \partial_\rho \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\xi^\beta \dot{x}^\gamma \dot{x}^\rho - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\xi^\beta \ddot{x}^\gamma + \partial_\rho \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\xi^\rho \dot{x}^\gamma \dot{x}^\beta + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\dot{x}^\gamma \dot{\xi}^\beta = 0.$$

Em seguida, utilize a equação da geodésica para eliminar $\ddot{x}$ da equação.

d) Definindo agora a derivada covariante total (ou derivada covariante direcional) como

$$\frac{D\xi^\alpha}{D\lambda} = \dot{x}^\rho D_\rho \xi^\alpha,$$

que pode ser interpretada como a derivada covariante de ξ projetada na direção da curva x. Mostre, por manipulação algébrica e troca conveniente dos nomes dos índices mudos, que podemos escrever a equação anterior para ξ como

$$\frac{D^2\xi^\alpha}{D\lambda^2} + (\partial_\gamma \Gamma^\alpha_{\beta\rho} + \Gamma^\mu_{\beta\rho}\Gamma^\alpha_{\mu\gamma} - (\rho \leftrightarrow \gamma))\dot{x}^\beta \dot{x}^\rho \xi^\gamma = 0.$$

O objeto entre parênteses é precisamente o tensor de Riemann! Portanto, podemos escrever

$$\frac{D^2\xi^\alpha}{D\lambda^2} + R^\alpha_{\beta\gamma\rho}\dot{x}^\beta \dot{x}^\rho \xi^\gamma = 0.$$

Essa é a equação do desvio geodésico. Podemos ver que a curvatura atua como uma "força" para o desvio da trajetória da partícula da geodésica. Esse resultado tem um análogo em gravitação newtoniana que pode ser usado para interpretar forças de maré. Para mais detalhes, procure por "Tidal Tensor" no wikipedia (não há página em português).

Schwarzschild

1. O *teorema de Birkhoff* afirma que, dada uma métrica na forma

$$ds^2 = f(r,t)dt^2 - g(r,t)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2),$$

as funções $f(r,t)$ e $g(r,t)$ não podem depender do tempo. Impondo que a métrica acima seja solução das equações de Einstein no vácuo $R_{\mu\nu} = 0$, mostre a validez do teorema de Birkhoff. (Dica: para simplificar os cálculos, escreva $f(r,t) = \exp(2\alpha(r,t))$ e $g(r,t) = \exp(2\beta(r,t))$.)

2. Considere os seguintes 4-vetores no espaço-tempo de Schwarzschild:

$$a^\mu = \delta^\mu_0, \quad b^\mu = \delta^\mu_1, \quad c^\mu = \delta^\mu_0 + \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)\delta^\mu_1.$$

Alguns destes 4-vetores é nulo?

3. Considere uma régua no espaço-tempo de Schwarzschild, colocada na direção radial respeito ao corpo de massa M que gera o campo gravitacional. A regoa se estende desde r_1 até $r_2 > r_1$. Calcule o comprimento da regoa na aproximação

$$\frac{GM}{c^2} \ll r_{1,2}.$$

4. Qual é o valor do raio de Schwarzschild de um corpo esférico com a massa da Terra? E de um corpo com a massa do Sol? Qual a razão entre esses raios de Schwarzschild e os raios físicos? Qual a métrica fora do Sol e da Terra?

5. Um aluno do curso de Relatividade Geral decide testar se o que está aprendendo na aula faz sentido. Para isso, ele decide cair radialmente em um buraco negro junto com um aparelho que emite ondas de rádio. Seu colega recebe essas ondas de rádio enquanto está parado em (r_*,θ_*,ϕ_*). Para resolver esse exercício, use que

$$E_\lambda = (1 - R_s/r)\frac{dt}{d\lambda},$$

é uma constante do movimento (Sean Carroll eq. 5.61).

a) Mostre que a velocidade do aluno caindo no buraco negro com relação à t é:

$$\frac{dr}{dt} = -\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)\sqrt{\frac{R_s(r_* - r)}{r(r_* - R_s)}}.$$

Dica, encontre primeiro $dr/d\tau$, onde τ é o tempo próprio do aluno caindo no buraco negro.

b) Mostre que a razão entre as frequências da onda de rádio emitida e a onda de rádio observada é

$$\frac{\omega_{\text{em}}}{\omega_{\text{obs}}} = \frac{\sqrt{1 - R_s/r_*}}{1 - R_s/r_{\text{em}}}\left(\sqrt{1 - R_s/r_*} + \sqrt{R_s/r_{\text{em}} - R_s/r_*}\right).$$

Dica: use que a frequência de um fóton percorrendo uma geodésica nula $x^\nu(\lambda)$ detectado por um observador com 4-velocidade U^μ é

$$\omega = -g_{\mu\nu}U^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda}.$$

c) Mostre que a relação entre o redshift sofrido pela onda se relaciona com a massa do buraco negro como

$$\frac{\lambda_{\text{obs}}}{\lambda_{\text{em}}} \propto e^{\frac{t_{\text{obs}}}{2GM}},$$

onde t_{obs} é o tempo que leva pra onda ir do ponto de emissão até o ponto de detecção.
DICA: use que $r_{\text{em}} \to R_s$

Buraco negro de Kerr

1. Considere uma partícula (com ou sem massa) nos arredores de um buraco negro que gira com momento angular constante. Mostre que se a partícula começa seu movimento no plano equatorial ($\theta = \pi/2$) e tem $\dot{\theta}$ nulo inicialmente, seu movimento continua sempre nesse plano. Isso acontece para qualquer plano? Compare seu resultado com o caso do buraco negro de Schwarzschild.

2. Encontre a energia e o momento angular (na direção z) dessa partícula. Escreva $\dot{t}$ e $\dot{\phi}$ em função de ambos.

3. Usando os resultados dos itens anteriores, mostre que, para uma partícula sem massa, é possível escrever

$$\dot{r}^2 = \frac{(r^2 + a^2)^2 - a^2\Delta}{r^4}(E - V_+)(E - V_-),$$

onde

$$V_\pm = L\frac{R_s a r \pm \sqrt{\Delta}}{(r^2 + a^2)^2 - a^2\Delta}.$$