Lista de Exercícios III

Mais eletromagnetismo

1. A energia de uma partícula não relativística em um campo eletromagnético pode ser calculada usando a equação usual para a Hamiltoniana, $H = p^i \dot{x}_i - L$. Qual é a expressão explicita para tal energia em termos da velocidade da partícula? Quanto vale a mesma expressão escrita em termos do momento conjugado?

2. Considere uma partícula de carga elétrica e em um referencial onde o campo eletromagnético aparece como um campo puramente magnético uniforme e constante (claramente, essa é uma idealização válida apenas em regiões pequenas do espaço, mas ignoraremos este detalhe). Consideramos os eixos orientados de forma que $\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{e}_z$.

   - Mostre que, usando a expressão relativistica da "energia de movimento" $E_{kin} = m\gamma$ onde $\gamma = (1 - \boldsymbol{v}^2)^{-1/2}$, a derivada temporal da energia vale
   $$\frac{dE_{kin}}{dt} = \boldsymbol{v} \cdot \frac{d\boldsymbol{p}}{dt};$$
   - Use a expressão acima e a expressão para $d\boldsymbol{p}/dt$ em um campo eletromagnético para estabelecer que, no caso do campo magnético constante e uniforme considerado, a energia de movimento se conserva;
   - Usando a questão antecedente: quanto vale a energia total da partícula no caso considerado?
   - Escreva agora as equações de movimento para a partícula no campo $\boldsymbol{B}$ constante em termos da velocidade da partícula mesma (dica: é conveniente usar a expressão da velocidade em termos do momento e da energia relativistica);
   - Resolva as equações de movimento em termos de condições iniciais genéricas;
   - Considere agora o referencial inercial K' que está em movimento com velocidade $\boldsymbol{V}$ respeito ao referencial no qual o campo eletromagnético é puramente magnético. Quanto valem os campos

elétrico e magnético em K'? Faça o cálculo usando primeiro o tensor $F_{\mu\nu}$ e depois o 4-potencial A_μ, verificando que os resultados obtidos são os mesmos.

Campos clássicos

1. Como mencionamos nas aulas, a ação de uma teoria de campo geral $\varphi(x)$ é definida por

$$S = \int_\Omega \mathcal{L}(\varphi(x), \partial\varphi(x), x),$$

one Ω é uma certa região do espaço-tempo de Minkowski. Como no caso de sistemas mecânicos, as equações de movimento (ou equações de Euler-Lagrange) podem ser calculadas usando variações infinitesimais

$$\varphi(x) \to \varphi(x) + \delta\varphi(x),$$

onde $\delta\varphi(x)$ é uma função arbitrária que se anula na fronteira de Ω. Mostre que, ao requisitarmos que a variação da ação seja nula e usando oportunas integrações por partes, as equações de movimento obtidas são

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} = 0.$$

2. Considere um campo escalar $\varphi(x)$:

   - Quantos termos invariantes de Lorentz podem ser escritos na ação do campo com, no máximo, duas derivadas? Quantos são independentes depois de aplicar, se necessário, integrações por partes?
   - Considerando o item antecedente, escreva a ação mais geral para o campo φ que seja invariante de Lorentz e que contenha no máximo duas potências do campo e duas derivadas;
   - Calcule as equações de Euler-Lagrange;
   - Considere agora uma transformação infinitesimal $x^\mu \to x^\mu + \xi^\mu(x)$. Qual a condição que os parâmetros $\xi^\mu(x)$ devem satisfazer para deixar a ação invariante?
   - Usando os resultados do item antecedente, calcule o tensor energia-momento do campo escalar φ e o tensor momento angular.

3. Considere o campo eletromagnético $F_{\mu\nu}$. Calcule explicitamente as componentes do tensor energia momento.

4. Nas aulas definimos o tensor momento angulas do eletromagnetismo como
$$M^{\rho\alpha\mu} = x^{\rho}T^{\alpha\mu} - x^{\alpha}T^{\rho\mu}.$$
O tensor (densidade de) momento angular de uma partícula, por outro lado, é
$$M_P^{\alpha\beta} = \left(x^{\alpha}p^{\beta} - x^{\beta}p^{\alpha}\right),$$
onde p^{α} é o 4-momento.

   - Mostre que a densidade de momento angular para um sistema de partículas pode ser escrito como
   $$M_P^{\rho\alpha\mu} = x^{\rho}T_P^{\alpha\mu} - x^{\alpha}T_P^{\rho\mu},$$
   onde $T_P^{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento da partícula;
   - Mostre que, dada a conservação da soma entre o tensor energia-momento do campo eletromagnético e das partículas, é verdade que
   $$\partial_{\mu}(M^{\rho\alpha\mu} + M_P^{\rho\alpha\mu}) = 0.$$

Gravidade em relatividade

1. Considere um referencial K' em movimento uniformemente acelerado com aceleração $\boldsymbol{a} = a\boldsymbol{e}_x$. Quanto vale o elemento de linha relativístico nas coordenadas do referencial K'?

2. Mostre que os símbolos de Christoffel $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ **não são** tensores de tipo (1,2). [Dica: use a definição dos símbolos de Christoffel em termos do tensor métrico e as transformações do tensor métrico]. A mesma conclusão vale quando o cálculo é feito com tensores Newtonianos?

3. Usando o Wolfram Mathematica ou o Python, crie um programa que calcule os símbolos de Christoffel dadas as coordenadas e o tensor métrico.

4. Usando o programa da pergunta antecedente, calcule os símbolos de Christoffel para o espaço euclidiano R^3 descrito em coordenadas esféricas e cilíndricas.

5. Calcule agora os símbolos de Christoffel para uma esfera em 3 dimensões. Quais as coordenadas que deixam o cálculo mais simples? Qual a métrica a ser usada?

6. Nas aulas afirmamos que a ação

$$S_{alt} = \int d\tau g_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu},$$

com a condição $g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} = 1$, pode ser usada para calcular a equação da geodésica. Mostre que as equações de Euler-Lagrange de S_{alt} correspondem exatamente às equações do movimento achadas nas aulas.

7. Quais as simetrias da ação S_{alt} definida acima? É verdade que as cargas de Noether calculadas usando S_{alt} são as mesmas já calculadas usando a ação relativistica usual? Use algum exemplo concreto para se convencer que quanto afirmado é verdade;

8. Calcule as equações de Maxwell em relatividade geral.

9. Usando Wolfram Mathematica ou Python, crie um programa que calcule o tensor de Riemann dadas as coordenadas e a métrica do espaço. Tome cuidado em verificar que as propriedades de simetria sejam respeitadas.

10. Use o programa que você criou na questão antecedente para calcular o tensor de Riemann para o espaço R^3 descrito em coordenadas cartesianas, esféricas e cilíndricas e para a esfera em 3 dimensões.

Ação de Einstein-Hilbert (1)

1. Escreva a ação de Einstein-Hilbert em unidades nas quais $c \neq 1$.

2. Calcule o tensor energia-momento de um campo escalar usando a definição

$$T^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu}\mathcal{L} - 2\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta g_{\mu\nu}}.$$