Lista de Exercícios II

Relatividade Especial

1. Verifique explicitamente que o intervalo

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

é invariante ao aplicarmos uma transformação de Lorentz.

2. Considere um relógio em movimento. Use a transformação de Lorentz para escrever o tempo medido no referencial de repouso do relógio em termos do tempo medido em um referencial que mede o relógio em movimento com velocidade uniforme na direção x.

3. Repita o cálculo do item antecedente supondo agora que no segundo referencial o relógio está em movimento com velocidade uniforme ao longo da direção z. O que muda?

4. Considere um fóton em movimento no referencial K com velocidade

$$\boldsymbol{v} = c\,(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta),$$

e um referencial K' em movimento com velocidade $\boldsymbol{V}$ respeito ao referencial K. Quanto vale a velocidade do fóton no referencial K'? Mostre que o postulado da constância da velocidade da luz é respeitado.

Tensores Minkowskianos

1. Considere a 4-velocidade de um corpo

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds}.$$

- Quanto valem explicitamente as componentes de u^α?
- Usando as propriedades de transformação dos 4-vetores, use o 4-vetor u^α para calcular as regras de transformação da velocidade de um corpos ao mudarmos de referencial inercial.

2. Usando o 4-momento p^α de uma partícula, calcule como a energia E e o momento $\boldsymbol{p}$ transformam ao aplicarmos uma transformação de Lorentz ao longo do uma direção genérica.

Ação relativística e conservação do 4-momento

1. Como vimos nas aulas, a ação de uma partícula livre relativística é dada por
$$S = -mc \int d\lambda \sqrt{v_\mu v^\mu}, \quad v^\mu = \frac{dx^\mu(\lambda)}{d\lambda}.$$
Mostre que a ação é invariante para reparametrização do parâmetro, isto é, para a transformação
$$\lambda \to \lambda'(\lambda),$$
onde λ' é uma função qualquer.

2. A invariância para mudança de parâmetro é mantida na versão alternativa da ação
$$S' = -\frac{c}{2} \int d\lambda \left(\sigma(\lambda) v^2 + \frac{m^2}{\sigma(\lambda)} \right)?$$
Quais condições devem ser satisfeitas?

3. Considere agora a ação para uma partícula massless. Como vimos na aula, o 4-momento conservado associado com a invariância para translações no espaço-tempo vale
$$p^\mu = \sigma(\lambda) \frac{dx^\mu}{d\lambda}.$$
Mostre que, usando a invariância para reparametrização, é sempre possível escolher $\sigma(\lambda) = 1$.

4. Considere um decaimento $A \to B_1 + B_2$. Calcule a energia do corpo B_1 apenas em termos das massas dos corpos A, B_1 e B_2.

5. Verifique com um cálculo explicito a identidade
$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0,$$
onde $T^{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento de um conjunto de partículas.

6. Quanto valem as componentes do tensor $F^\mu{}_\nu$? E do tensor $F_{\mu\nu}$?

7. Dado um 4-potential $A_\mu(x)$, mostre que é sempre possível impor $\partial_\mu A^\mu(x) = 0$ aplicando uma transformação de gauge.

8. Calcule as equações de Maxwell em termos de $A_\mu(x)$. Qual é uma escolha de gauge conveniente para simplificar as expressões?

9. Usando a definição $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, mostre que as componentes do 4-potential podem ser identificadas com $A^\mu = (\phi, \boldsymbol{A})$, onde ϕ é o potential escalar e $\boldsymbol{A}$ é o potential vetor.

10. Mostre que as equações de Maxwell $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\nu F_{\alpha\beta} = 0$ são equivalentes a $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0$ e $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\partial \boldsymbol{B}/\partial t$.