# Lista de Exercícios I

## Princípio da ação estacionária

1. Considere um par de corpos puntiformes, de massas $m_1$ e $m_2$, conectados por uma mola de constante elástica $k$.

   - Escreva a Lagrangiana do sistema;
   - Escreva as equações de movimento para os dois corpos;
   - A Lagrangiana é invariante para transformações de Galileu? Justifique.

2. Repita o exercício acima considerando agora dois corpos (de massas $m_1$ e $m_2$ e cargas elétricas $q_1$ e $q_2$) que interagem através de uma força eletrostática.

## Tensores Newtonianos

1. Considere dois vetores de componentes $\{p^1, p^2, p^3\}$ e $\{q^1, q^2, q^3\}$. Mostre explicitamente que o objeto $\{p^1q^1, p^2q^2, p^3q^3\}$ não é um vetor Newtoniano, enquanto que $\{p^2q^3 - p^3q^2, p^3q^1 - p^1q^3, p^1q^2 - p^2q^1\}$ é um vetor Newtoniano. Qual a interpretação desse último objeto?

2. Considere o espaço $\mathbb{R}^3$. Quanto vale o elemento de comprimento $ds^2$ em coordenadas cilíndricas? Quanto vale o tensor métrico nessas coordenadas?

3. Calcule explicitamente os símbolos de Christoffel em coordenadas esféricas e cilíndricas.

4. Vimos nas aulas que o cálculo tensorial nós permite de calcular o divergente de um campo vetorial. Derivamos, mas especificamente, que o divergente de um campo vetorial em coordenadas esféricas é

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 V^r) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta V^\theta) + \frac{\partial V^\phi}{\partial\phi}.$$

   Contudo, essa expressão não é aquela que pode ser achada nos livros de cálculo. Mostre em detalhe porque as duas expressões são diferentes e como encontrar a fórmula usual a partir da equação acima.

5. Mostre explicitamente que, dados um tensor simétrico $S^{ij}$ e um tensor antisimétrico $A^{ij}$, vale identicamente

$$S^{ij}A_{ij} = 0.$$

6. Considere o espaço euclidiano $\mathbb{R}^4$ com coordenadas esféricas (ou, como são chamadas, hiper-esféricas)

$$x^1 = r\sin\chi\sin\theta\cos\phi,\;\; x^2 = r\sin\chi\sin\theta\sin\phi,\;\; x^3 = r\sin\chi\cos\theta,\;\; x^4 = r\cos\chi.$$

Calcule o elemento de volume nas coordenadas $\{r, \chi, \theta, \phi\}$. Usando o fato de que $r \in [0, +\infty)$, $\chi \in [0, \pi)$, $\theta \in [0, \pi)$ e $\phi \in [0, 2\pi)$, calcule o volume da esfera 3-dimensional $\mathbb{S}^3$ de raio R. Quanto vale a superfície de $\mathbb{S}^3$?

## Leis de conservação

1. Considere uma partícula cuja ação é

$$S = \int dt \left( \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - \frac{\alpha}{x^2} \right).$$

- A energia é conservada? Em caso positivo, qual a expressão explicita?
- Mostre que a ação é invariante para a transformação de Weyl

$$t' = \lambda t, \qquad x'(t') = \sqrt{t}x(t).$$

- Qual a quantidade conservada associada com a transformação de Weyl?
- Usando as duas constantes do movimento, você consegue determinar univocamente a incógnita $x(t)$?