Lista de Exercícios IV

1. Dado um tensor $T = T^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\gamma}\partial_\alpha \otimes dx^\beta \otimes \partial_\gamma$, qual a operação que permite de calcular $T^{\alpha\beta\gamma}$ e $T_{\alpha\beta\gamma}$?

2. Considere o espaço-tempo de Minkowski com tensor metrico
$$g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(+1, -1, -1, -1).$$
Dado um vetor V de componentes $V^\mu = (a, b, c, d)^T$, calcule as componentes da única 1-forma associada ao vetor V.

3. Uma variedade é *mergulhada* quando é subvariedade de $\mathbb{R}^n$ (para algum n). Nesse caso, é possível definir o elemento de linha $\mathbf{d}\ell$ e por
$$ds^2 = \mathbf{d}\ell^T \cdot \mathbf{d}\ell \equiv g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu.$$
   (a) Calcule quanto vale o tensor metrico $g_{\mu\nu}$ para um esfera de dimensão 2 mergulhada em $\mathbb{R}^3$;
   (b) Dado um vetor $V^\mu = (\alpha(\theta, \phi), \beta(\theta, \phi))^T$, calcule as componentes da 1-forma associada.

4. Dada uma mudança de coordenadas $x \to x'(x)$, vimos que os elementos dos vetores e das 1-formas transformam de acordo com
$$V'^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} V^\beta, \qquad \omega'_\mu = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\omega_\alpha.$$
   (a) Quanto vale
$$\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\gamma} =?$$
   (Sugestão: use a regra da cadeia.)
   (b) Usando o resultado do item **(a)**, mostre que as combinações
$$V^\mu W_\mu, \qquad T_{\mu\nu}V^\mu W^\nu,$$
   são invariantes para mudança de coordenadas (ou seja, $V'^\mu W'_\mu = V^\mu W_\mu$ etc.).

(c) Usando o resultado do item **(b)** deduzir que todas as combinações de tensores com índices contraidos (ou seja, somados) são invariantes para mudança de coordenadas.

5. Considere um tensor simétrico $S_{\mu\nu} = S_{\nu\mu}$ e um tensor antisimétrico $A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu}$.

   (a) Mostre que os tensores $S^{\mu\nu}$ e $A^{\mu\nu}$ são simétrico e antisimétrico, respetivamente;

   (b) Mostre que $S_{\mu\nu}A^{\mu\nu} = 0$.

6. Usando a identificação do elemento de volume de $\mathbb{R}^3$ com $d^3x \equiv dx \wedge dy \wedge dz$, calcule o elemento de volume em coordenadas esféricas.

7. Uma esfera unitária em $\mathbb{R}^n$, $S^n = \{(x^1, x^2, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n | (x^1)^2 + \dots (x^n)^2 = 1\}$, pode ser descrita em coordenadas esféricas usando uma coordenada radial r e $\phi_1, \dots, \phi_{n-1}$ ângulos da forma seguinte:

$$
\begin{aligned}
x^1 &= r\cos(\phi_1) \\
x^2 &= r\sin(\phi_1)\cos(\phi_2) \\
x^3 &= r\sin(\phi_1)\sin(\phi_2)\cos(\phi_3) \\
&\vdots \\
x^{n-1} &= r\sin(\phi_1)\dots\sin(\phi_{n-2})\cos(\phi_{n-1}) \\
x^n &= r\sin(\phi_1)\dots\sin(\phi_{n-2})\sin(\phi_{n-1})
\end{aligned}
$$

   Quanto vale o elemento de volume de $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^5$ em coordenadas esféricas?

Exercícios optativos

1. Considere uma 0-forma ϕ. Calcule explicitamente $d^2\phi$.

2. Dado um campo vetorial $V = (v^1, v^2, v^3)^T$, podemos associar uma 1-forma

$$\omega_V^{(1)} = v_i dx^i,$$

   e uma 2-forma

$$\omega_V^{(2)} = v^1 dx^2 \wedge dx^3 - v^2 dx^1 \wedge dx^3 + v^3 dx^1 \wedge dx^2.$$

   Mostre que $d\omega_V^{(1)}$ é associada com rot$V$ e que $d\omega_V^{(2)}$ é associada com div$V$.