Lista de Exercícios IV

1. Como vimos nas aulas, as componentes contravariantes e covariantes de um vetor possuem regras de transformação bem definidas sob mudanças de coordenadas. Por outro lado, vimos também que a contração com o tensor métrico converte componentes contravariantes em componentes covariantes e vice-versa. Mostre com um cálculo explícito que:

(a) a contração $g_{\mu\nu}v^\nu$ transforma como as componentes covariantes de um vetor;

(b) a contração $g^{\mu\nu}v_\nu$ transforma como as componentes contravariantes de um vetor.

2. Considere o delta de Kronecker δ^μ_ν em três e quatro dimensões. Como transforma para uma transformação geral de coordenadas?

3. Considere o símbolo de Levi Civita em três dimensões (ϵ_{ijk}, com $i, j, k = 1, 2, 3$) e em quatro dimensões ($\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ com $\mu, \nu, \rho\, \sigma = 1, \ldots, 4$). Mostre que a transformação para um sistema geral de coordenadas envolve o determinante da transformação Jacobiana.

4. O tensor métrico no espaço de Minkowski usado em relatividade especial é dado por

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Dado um vetor de componentes contravariantes $(v^\alpha) = (v^0, v^1, v^2, v^3)$, quanto valem as componentes covariantes (v_α)?

(b) Quanto vale o tensor métrico inverso $(g^{\alpha\beta})$?

(c) Quanto vale o tensor métrico "misto"$(g^\alpha{}_\beta)$?

(c) Dados dois vetores cujas componentes contravariantes são $(v^\alpha) = (v^0, v^1, v^2, v^3)$ e $(w^\alpha) = (w^0, w^1, w^2, w^3)$, quanto vale o produto escalar definido pela métrica? É verdade que tal produto escalar é definido positivo?

5. Considere o espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$. Calcule o tensor métrico em coordenadas esférica e cilíndricas. Qual a matriz $(g_{\alpha\beta})$ do tensor métrico obtida em coordenadas genéricas?

6. Considere uma distribuição de massa $\rho(\vec{r})$ em movimento. O momento angular total deste sistema é dado por

$$\vec{L} = \int \mathrm{d}V \ \rho(\vec{r})(\vec{r} \times \vec{v}),$$

onde $\mathrm{d}V$ é o elemento de volume e $\vec{v}$ é a velocidade de cada ponto. Usando que $\vec{v} = \vec{r} \times \vec{\omega}$, sendo $\vec{\omega}$ a velocidade angular referente à origem, mostre que as componentes do momento angular podem ser escritas como

$$L_i = I_{ij}\omega_j,$$

com I_{ij} o tensor momento de inércia. Determine I_{ij} para uma distribuição arbitrária ρ.

7. Considere o tensor de energia-momento eletromagnético dado por

$$T^{\mu\nu} = F^{\mu}{}_{\alpha}F^{\alpha\nu} - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta},$$

sendo

$$(\eta^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a métrica do espaço e

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

o tensor de Maxwell.

Mostre que:

(a) $T^{\mu\nu}$ é um tensor simétrico;

(b) $T^{\mu}{}_{\mu}$=0;

(c) $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Para tal, use que

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0,$$

$$\partial_\alpha F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\alpha} + \partial_\nu F_{\alpha\mu} = 0.$$

8. Considere um espaço n-dimensional e

$$V = \epsilon_{\mu_1\cdots\mu_n}\omega^{\mu_1\cdots\mu_n},$$

com $\omega^{\mu_1\cdots\mu_n}$ um tensor de rank n e $\epsilon_{\mu_1\cdots\mu_n}$ o símbolo de Levi-Civita n-dimensional.

(a) Como se transforma V sob uma transformação geral de coordenadas? Em quais casos ele permanece invariante?

(b) Se $g_{\mu\nu}$ é a métrica deste espaço, como se transforma $\det(g_{\mu\nu})$ sob uma transformação de coordenadas?

(c) Qual combinação de V e $\det(g_{\mu\nu})$ é sempre invariante sob transformações de coordenadas?

9. [**Derivada covariante**] Considere um *campo tensorial* $(v^b)(x)$ que depende da posição. Vamos agora introduzir a ideia de *derivada covariante*.

(a) Considere a derivada $\partial v^b/\partial x^a \equiv \partial_a v^b$, onde (v^b) é um campo tensorial $(1,0)$. Como transforma esse objeto aplicando uma transformação de coordenadas $(x^a) \to (q^a)$? É um tensor $(1,1)$ como os índices sugerem?

(b) Os símbolos de Christoffel Γ^a_{bc} são definidos de acordo com

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad}\left(-\partial_d g_{bc} + \partial_c g_{bd} + \partial_b g_{cd}\right).$$

Como transforma esse objeto aplicando uma transformação de coordenadas $(x^a) \to (q^a)$?

(c) A *derivada covariante* é definida por

$$\nabla_a v^b \equiv \partial_a v^b + \Gamma^b_{ac} v^c.$$

Mostre que é um tensor $(1,1)$.

10. [**Aplicação da derivada covariante**] Vamos agora ver por que a derivada covariante é útil. Considere um campo tensorial $(v^b)(x)$ em duas dimensões (i.e. $b = 1, 2$) completamente na direção radial.

(a) Quais as componentes de tal campo em coordenadas polares?

(b) Quanto valem as derivadas $\partial_a v^b$ calculadas respeitos às coordenadas polares? O resultado que você está achando faz sentido à luz de quanto vimos no terceiro módulo do curso? (Sugestão: preste atenção no que acontece na derivada respeito à coordenada θ. As coordenadas de um vetor em coordenadas polares dependem ou não do ângulo?)

(c) Calcule os símbolos de Christoffel em coordenadas polares;

(d) Usando os resultado do item antecedente, calcule a derivada covariante aplicada ao campo vetorial considerado nos itens anteriores. Mostre que agora a derivada respeito à coordenada angular faz sentido.

11. Seja

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1+2\phi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1+2\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1+2\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1+2\phi \end{pmatrix}$$

a métrica de um espaço 4-dimensional, onde $x_0 = t$ é a coordenada temporal e $x_i,\ i = 1, 2, 3$ são as coordenadas espaciais.

Considere também que $\phi(\vec{x}, t) \ll 1$.

(a) Calcule a métrica inversa.

(b) Calcule os símbolos de Christoffel.

(c) A equação que descreve o movimento de uma partícula de massa m neste espaço é

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\tau} = 0,$$

sendo Γ os símbolos de Christoffel e $\tau \simeq t$. Determine a partir da equação acima a equação diferencial satisfeita por x^i.