

Lista de Exercícios IV

1. A temperatura em um quarto é dada pelo campo escalar $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$T(\vec{x}) = F(x^2 + y^2) + Gz, \quad (1)$$

onde F e G são constantes com dimensões oportunas.

- (a) Quais são as dimensões de F e G ?
(b) Calcule o gradiente e o diferencial de $T(\vec{x})$.

2. Usando o $T(\vec{x})$ do exercício 1, calcular a integral

$$\int_{C_1} d^3x T(\vec{x}),$$

onde C_1 corresponde à região interna de um cilindro de raio R e altura h . Quais as coordenadas melhores?

3. Considere a região do plano

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq b \right\}.$$

Calcule a área da região usando as regras de integração vistas na aula.

4. Calcule

$$\int_T d^2x (x^2 + y^2),$$

onde T é o triângulo delimitado por $y = x$, $y = 1$ e $x = 0$.

5. Considere o caminho

$$t \mapsto R \cos \omega t \mathbf{e}_x + R \sin \omega t \mathbf{e}_y + \omega t \mathbf{e}_z.$$

- (a) Desenhe a forma geométrica do caminho;
(b) Quanto vale o vetor velocidade? E o vetor aceleração?
(c) Quais as coordenadas melhores para respeitar a simetria do sistema? Escreva os vetores posição, velocidade e aceleração nessas coordenadas e usando os versores oportunos.

6. Considere um ponto vinculado a se movimentar apenas na superfície de uma esfera de raio R . Escreva os vetores posição, velocidade e aceleração em função do tempo usando os versores que respeitam a simetria do sistema. Quanto vale a energia cinética do corpo?
7. Considere um corpo carregado de massa m , carga elétrica $q > 0$ sujeito à força de Coulomb

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^3} \mathbf{r},$$

onde a força é gerada por um corpo infinitamente massivo de carga elétrica Q .

- (a) Qual a energia potencial do corpo?
- (b) Escreva a energia total em coordenadas esféricas;
- (c) Desenhe o diagrama de fase considerando os dois casos $Q > 0$ e $Q < 0$.