Lista de Exercícios IV

1. A temperatura em um quarto é dada por
$$T(\vec{x}) = f(x^2 + y^2) + gz \tag{1}$$
onde f e g são constantes com dimensões oportunas.
   (a) Quais são as dimensões de f e g?;
   (b) Calcule o gradiente, a divergência e o rotacional de $T(\vec{x})$.

2. Usando o $T(\vec{x})$ do exercício 1, calcular as seguintes integrais
$$\int_{C_1} d^3x\, T(\vec{x}), \qquad \int_{C_2} d^3x\, T(\vec{x}),$$
onde C_1 corresponde à região interna de um cubo de lado a e C_2 à região interna de um cilindro de raio R e altura h.

3. O campo elétrico de uma carga $q > 0$ é dado por
$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{||\vec{x}||^3} \vec{x} \tag{2}$$
Calcular a integral de linha ao longo dos caminhos indicados na figura 1. Para isto,
   (a) parametrize os caminhos $\Gamma_1 : A \to B \to C$ e $\Gamma_2 : A \to C$, onde $A = (0, 0, 0)$, $B = (0, 2, 0)$ e $C = (0, 0, 2)$;
   (b) calcule o elemento de linha;
   (c) calcule as integrais.

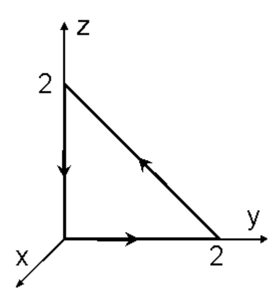

Figura 1:

4. Considere o paraboloide $z = x^2 + y^2$ e o hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

   (a) escreva a parametrização do vetor de superfície

   $$\vec{r}(x, y) \qquad \text{para} \quad z > 0$$

   (b) calcule o elemento de superfície nos dois casos.

5. Verifique o teorema de Gauss para o campo vetorial

   $$\vec{v} = y\hat{e}_x + x\hat{e}_y,$$

   em um cubo de lado a

6. Verifique o teorema de Stokes para o campo

   $$\vec{v} = xy\hat{e}_x + 2yz\hat{e}_y + 3xz\hat{e}_z,$$

   usando a área triangular da figura 1.

7. Um oscilador harmônico tridimensional tem o campo de forças

   $$\vec{F} = k\vec{x}$$

   (a) Quanto vale $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$;

   (b) Quanto vale $\vec{\nabla} \times \vec{F}$;

   (c) O campo $\vec{F}$ é conservativo ou solenoidal?

8. Calcule

   (a) $\vec{\nabla}$ em coordenadas esféricas;

   (b) $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ e $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ em coordenadas esféricas.

9. O campo gravitacional de um corpo esférico de massa M e raio R_M é dado por

   $$\vec{g} = -\frac{GM}{r^2}\hat{e}_r, \qquad r > R_M.$$

   Considerando uma superfície esférica de raio R com centro no centro do corpo de massa M:

(a) Calcule o fluxo de $\vec{g}$ através da superfície esférica;

(b) Usando o teorema de Gauss, mostre que a divergência do campo $\vec{g}$ é proporcional à densidade de massa ρ,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g} = -4\pi G\rho.$$

10. Verifique que $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ é um campo escalar e que $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ é um campo vetorial.