Lista de Exercícios III

1. Considere o caminho

$$t \mapsto R\cos\omega t\,\boldsymbol{e}_x + R\sin\omega t\,\boldsymbol{e}_y + \omega t\,\boldsymbol{e}_z\,.$$

   (a) Desenhe a forma geométrica do caminho;

   (b) Quanto vale o vetor velocidade? E o vetor aceleração?

   (c) Quais as coordenadas melhores para respeitar a simetria do sistema? Escreva os vetores posição, velocidade e aceleração nessas coordenadas e usando os versores oportunos.

2. Considere um ponto vinculado a se movimentar apenas na superfície de uma esfera de raio R. Escreva os vetores posição, velocidade e aceleração em função do tempo usando os versores que respeitam a simetria do sistema. Quanto vale a energia cinética do corpo?

3. Considere um corpo carregado de massa m, carga elétrica $q > 0$ sujeito à força de Coulomb

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r^3}\boldsymbol{r}\,,$$

   onde a força é gerada por um corpo infinitamente massivo de carga elétrica Q.

   (a) Qual a energia potencial do corpo?

   (b) Escreva a energia total em coordenadas esféricas;

   (c) Desenhe o diagrama de fase considerando os dois casos $Q > 0$ e $Q < 0$.

4. A temperatura em um quarto é dada pelo campo escalar $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$T(\vec{x}) = F\,(x^2 + y^2) + Gz\,, \tag{1}$$

   onde F e G são constantes com dimensões oportunas.

   (a) Quais são as dimensões de F e G?;

   (b) Calcule o gradiente e o diferencial de $T(\vec{x})$.

5. Considere a região do plano

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq b \right\} .$$

Calcule a área da região usando as regras de integração vistas na aula.

6. Calcule

$$\int_T d^2x \, \left(x^2 + y\right) \, ,$$

onde T é o triângulo delimitado por $y = x$, $y = 1$ e $x = 0$.

7. Usando o $T(\vec{x})$ do exercício 4, calcular as seguintes integrais

$$\int_{C_1} d^3x \, T(\vec{x}), \qquad \int_{C_2} d^3x \, T(\vec{x}),$$

onde C_1 corresponde à região interna de um cubo de lado a e C_2 à região interna de um cilindro de raio R e altura h. Escolha coordenadas oportunas para simplificar o cálculo.

8. O campo elétrico de uma carga $q > 0$ é dado por

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{||\vec{x}||^3} \boldsymbol{x} \tag{2}$$

Calcular a integral de linha ao longo dos caminhos indicados na figura 1. Para isto,

(a) parametrize os caminhos $\Gamma_1 : A \to B \to C$ e $\Gamma_2 : A \to C$, onde $A = (0, 0, 0)$, $B = (0, 2, 0)$ e $C = (0, 0, 2)$;

(b) calcule o elemento de linha;

(c) calcule as integrais.

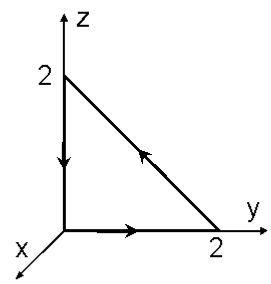

Figura 1:

9. Considere o paraboloide $z = x^2 + y^2$ e o hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

   (a) escreva a parametrização do vetor de superfície

$$\vec{r}(x, y) \qquad \text{para} \quad z > 0$$

   (b) calcule o elemento de superfície nos dois casos.

10. Verifique o teorema de Gauss para o campo vetorial

$$\boldsymbol{v} = y\hat{\boldsymbol{e}}_x + x\hat{\boldsymbol{e}}_y,$$

   em um cubo de lado a

11. Verifique o teorema de Stokes para o campo

$$\boldsymbol{v} = xy\hat{\boldsymbol{e}}_x + 2yz\hat{\boldsymbol{e}}_y + 3xz\hat{\boldsymbol{e}}_z,$$

   usando a área triangular da figura 1.

12. Um oscilador harmônico tridimensional tem o campo de forças

$$\boldsymbol{F} = k\boldsymbol{x}$$

   (a) Quanto vale $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{F}$;

   (b) Quanto vale $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}$;

   (c) O campo $\boldsymbol{F}$ é conservativo ou solenoidal?

13. Calcule

(a) $\boldsymbol{\nabla}$ em coordenadas esféricas;

(b) $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{F}$ e $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}$ em coordenadas esféricas.

14. O campo gravitacional de um corpo esférico de massa M e raio R_M é dado por

$$\boldsymbol{g} = -\frac{GM}{r^2}\hat{\boldsymbol{e}}_r, \qquad r > R_M.$$

Considerando uma superfície esférica de raio R com centro no centro do corpo de massa M:

(a) Calcule o fluxo de $\boldsymbol{g}$ através da superfície esférica;

(b) Usando o teorema de Gauss, mostre que a divergência do campo $\boldsymbol{g}$ é proporcional à densidade de massa ρ,

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{g} = -4\pi G\rho.$$