Lista de Exercícios II

1. Dadas as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & i \\ 2 & 0 & 3 \\ 2i & -2i & 2 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 \\ i & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

determine

a) $[A, B]$,

b) A^T, B^T,

c) $A^\dagger, B^\dagger$,

d) $\mathrm{Tr}(B), \det(B)$

e) A^{-1}, B^{-1}

f) $(AB)^T, (AB)^\dagger, (AB)^{-1}$

2. Dada a matriz

$$T = \begin{pmatrix} 2 & i & 1 \\ -i & 2 & i \\ 1 & -i & 2 \end{pmatrix};$$

a) calcule os autovalores $\lambda_{1,2,3}$

b) calcule $\mathrm{Tr}(T)$ e $\det(T)$

c) mostre que $\mathrm{Tr}(T) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ e $\det(T) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$

d) calcule os autovetores

e) escreva, se possível, a descomposição espectral de T

f) calcule e^T

3. As matrizes de Pauli são dadas por

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Na Mecânica Quântica, os operadores de spin de um elétron são $S_i = \frac{\hbar}{2}\sigma_i$.

a) Mostre que $\sigma_i^\dagger = \sigma_i$, $i = 1, 2, 3$;

b) Mostre que $\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + \epsilon_{ijk}\sigma_k$;

c) Deduza que $(\vec{a}^T \cdot \vec{\sigma})(\vec{b}^T \cdot \vec{\sigma}) = (\vec{a}^T \cdot \vec{b}) + i(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{\sigma}$, onde $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)^T$;

d) Calcule os autovetores e autovetores de cada uma das matrizes σ_i;

e) Calcule $e^{\vec{a}\cdot\vec{\sigma}}$.

4. Seja M uma matriz em $\mathbb{C}^2$.

   a) É verdade que $M = c1 + \vec{a}^T \cdot \vec{\sigma}$ com $(a_i, c) \in \mathbb{C}$?

   b) Usando as propriedades das matrizes $\vec{\sigma}$, calcule os coeficientes c e $\vec{a}$;

   c) No sentido de qual produto a base $\{1, \vec{\sigma}\}$ é ortogonal?

   d) Calcule e^M.

5. Usando como inspiração a estrutura das matrizes de Pauli, escreva todas as matrizes 3×3 hermitianas com traço nulo. Essas 8 matrizes são chamadas de matrizes de Gell-mann λ_a, $a = 1, \ldots, 8$. É verdade que o conjunto de matrizes $\{1, \lambda_{1,\ldots,8}\}$ são base para o espaço das matrizes de $\mathbb{C}^3$?

6. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -\gamma \end{pmatrix},$$

   que aparece na resolução das equações de movimento do oscilador harmônico amortecido. No caso $\gamma = 2\omega_0$ calcule

   a) os autovalores;

   b) os autovetores;

   c) e^A.