Lista de Exercícios I

1. Mostre que $\vec{v} = \hat{e}_x$ e $\vec{w} = \hat{e}_y$ são vetores linearmente independentes. Calcule também a norma dos dois vetores.

2. Considere os seguintes vetores em $\mathbb{R}^2$: $\vec{v} = (1, 2)^T$ e $\vec{w} = (-1, 1)^T$.

   a Os vetores são linearmente independentes?

   b Escreva qualquer vetor $\vec{x} = (x_1, x_2)$ na base dada por $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

3. Determinar todos os vetores de $\mathbb{R}^3$ ortogonais ao vetor $\vec{v} = (2, 0, 1)^T$.

4. Mostrar que vale a identidade $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = -(\vec{w}^T \cdot \vec{v})\vec{u} + (\vec{w}^T \cdot \vec{u})\vec{v}$. Deduzir que $\vec{u}^T \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$.

5. Usando a definição do produto vetorial em termos dos versores de base, deduzir as propriedades do produto vetorial de dois vetores qualquer.

6. Mostre que o produto vetorial *não é associativo*, ou seja que $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \neq \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$.

7. Usando uma matriz 3×3 genérica, mostre com um cálculo explicito que vale a igualdade abaixo
$$\det(A) = \sum_{m,n,p} \varepsilon_{mnp} A_{1m} A_{2n} A_{3p}$$

8. O símbolo de Levi-Civita em $d = 2$ é definido por
$$\varepsilon_{mn} = \begin{cases} +1 & (m, n) = (1, 2) \\ -1 & (m, n) = (2, 1) \\ 0 & m = n \end{cases}$$
   Escreva a representação matricial.

9. Escreva a representação matricial do delta de Kronecker, δ_{ij}.

10. Usando a definição de produto externo entre vetores de báse $|e_i\rangle \langle e_j| =$ matriz cujo único elemento diferente de zero é o elemento (i, j), mostre que
$$|v\rangle \langle w| = \begin{pmatrix} v_1 w_1 & v_1 w_2 & \dots \\ \vdots & & \\ v_n w_1 & v_n w_2 & \dots \end{pmatrix}$$

a Mostre que

$$\sum_{m,n} \varepsilon_{mn} v_m v_n = 0;$$

b Escreva a soma acima como o produto entre dois vetores e uma matriz;

c Usando as regras do produto entre matrizes e vetores, verificar que a soma acima é verificada.

11. Calcule traço, determinante e inversa das seguintes matrizes:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

12. Mostre que $(A_1 A_2 \dots A_n)^{-1} = A_n^{-1} \dots A_2^{-1} A_1^{-1}$.

13. Mostre que, por qualquer $z \in \mathbb{C}$, vale

$$\frac{1}{z} = \frac{z^*}{|z|^2}.$$

14. Considere os números complexos

$$z_1 = \cos\theta_1 + i \sin\theta_1, \quad z_2 = \cos\theta_2 + i \sin\theta_2.$$

a Escrever a forma polar;

b Calcular $z_1 z_2$;

c Deduzir a expressão da rotação de coordenadas em um plano;

d Escrever a rotação em forma matricial.

15. Dadas as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & i \\ 2 & 0 & 3 \\ 2i & -2i & 2 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 \\ i & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

determine

a) $[A, B]$,

b) A^T, B^T,

c) $A^\dagger, B^\dagger$,

d) $\mathrm{Tr}(B), \det(B)$

e) A^{-1}, B^{-1}

f) $(AB)^T, (AB)^\dagger, (AB)^{-1}$

16. Dada a matriz

$$T = \begin{pmatrix} 2 & i & 1 \\ -i & 2 & i \\ 1 & -i & 2 \end{pmatrix};$$

a) calcule os autovalores $\lambda_{1,2,3}$

b) calcule $\mathrm{Tr}(T)$ e $\det(T)$

c) mostre que $\mathrm{Tr}(T) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ e $\det(T) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$

d) calcule os autovetores

e) escreva, se possível, a descomposição espectral de T

f) calcule e^T

17. As matrizes de Pauli são dadas por

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Na Mecânica Quântica, os operadores de spin de um elétron são $S_i = \frac{\hbar}{2}\sigma_i$.

a) Mostre que $\sigma_i^\dagger = \sigma_i$, $i = 1, 2, 3$;

b) Mostre que $\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\sum_k \epsilon_{ijk}\sigma_k$;

c) Deduza que $(\vec{a}^T \cdot \vec{\sigma})(\vec{b}^T \cdot \vec{\sigma}) = (\vec{a}^T \cdot \vec{b}) + i(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{\sigma}$, onde $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)^T$;

d) Calcule os autovetores e autovetores de cada uma das matrizes σ_i;

e) Calcule $e^{\vec{a}\cdot\vec{\sigma}}$.

18. Seja M uma matriz em $\mathbb{C}^2$.

a) É verdade que $M = c1 + \vec{a}^T \cdot \vec{\sigma}$ com $(a_i, c) \in \mathbb{C}$?

b) Usando as propriedades das matrizes $\vec{\sigma}$, calcule os coeficientes c e $\vec{a}$;

c) No sentido de qual produto interno a base $\{1, \vec{\sigma}\}$ é ortogonal?

d) Calcule e^M.

19. Usando como inspiração a estrutura das matrizes de Pauli, ache 8 matrizes 3×3 ortogonais (Lembre-se do produto interno do exercício anterior), hermitianas e com traço nulo. Essas matrizes são chamadas de matrizes de Gell-mann λ_a, $a = 1, \ldots, 8$. É verdade que o conjunto de matrizes $\{1, \lambda_{1,\ldots,8}\}$ são base para o espaço das matrizes de $\mathbb{C}^3$?

20. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -\gamma \end{pmatrix},$$

que aparece na resolução das equações de movimento do oscilador harmônico amortecido. No caso $\gamma = 2\omega_0$ calcule

a) os autovalores;

b) os autovetores;

c) e^A.