Lista de Exercícios II

1. Usando as técnicas desenvolvidas nas aulas, resolva a equação do movimento do oscilador harmônico simples.

2. A equação diferencial para a carga no capacitor de um circuito RLC em corrente alternada é

$$\ddot{Q}(t) + \gamma\dot{Q}(t) + \omega_0^2 Q(t) = \varepsilon\cos(\omega t).$$

Calcule a solução em função das condições iniciais $Q(0) = Q_0$, $\dot{Q}(0) = I_0$.

3. A força de Lorentz pode ser escrita em forma vetorial como

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v}\times\mathbf{B}\,,$$

onde q é a carga elétrica da partícula, $\mathbf{E}$ o campo elétrico e $\mathbf{B}$ o campo magnético, ambos constantes.

(a) Escreva a força de Lorentz em componentes usando a forma com índices e com as coordenadas (x, y, z) explicitamente;

(b) Resolva a equação do movimento para condições iniciais genéricas;

(c) Qual a solução que satisfaz $\mathbf{x}(0) = 0$ e $\mathbf{v}(0) = v_0\,\hat{e}_x$?

4. Um projétil é disparado com um ângulo θ respeito à direção horizontal e com uma velocidade v_0. Considerando a força de resistência do ar,

$$\vec{F}_{\text{res}} = -\alpha\vec{v},$$

sendo $\vec{v}$ a velocidade, determine a trajetoria de movimento do projétil.

5. Considere o plano inclinado da Figura 1, com atrito estático normal. O ângulo do plano muda de acordo com $\theta(t) = \alpha t$, onde α é constante. Encontre a solução das equações de movimento.

6. Uma particula em uma dimensão está sujeita a um potencial gravitacional,

$$V(x) = -\frac{k}{x^2},$$

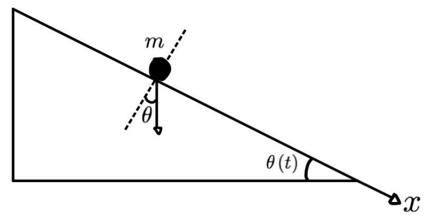

Figura 1: Plano inclinado com ângulo variável.

sendo k uma constante com unidades apropriadas. Determine a equação de movimento para a partícula e ache a solução. (Dica: pode ser conveniente usar a conservação da energia.)

7. Resolva a equação de Airy

$$y''(z) - zy(z) = 0\,,$$

a qual aparece na resolução do problema de autovalores de uma partícula num potencial linear na Mecânica Quântica. Para quais valores de z ela converge?

8. Um corpo de massa m está conectado a um pêndulo simples de comprimento L.

   (a) Escreva as equações de movimento para as duas componentes (x, y) (escolhidas oportunamente);

   (b) Escreva as mesmas equações de movimento em coordenadas polares no plano;

   (c) Desenhe o diagrama de fase da equação na direção tangente à trajetória;

   (d) Quais as posições de equilíbrio estável? E instável?

9. Desenhe o diagrama de fase de um corpo que sente um potencial (em uma dimensão)

$$U(x) = \frac{\sin(x)}{x}.$$

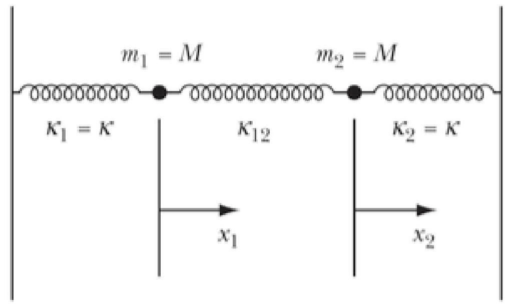

Figura 2: Osciladores acoplados.

10. Considere o sistema de osciladores harmônicos acoplados da Figura 2.

    (a) Calcule a equação do movimento do sistema, considerando $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$ como posições de equilibrio;

    (b) Escreva a equação do movimento como sistema de equações diferenciais da primeira ordem;

    (c) Resolva o sistema de equações diferenciais.

11. Considere um modelo de decaimento radioativo dado pela equação de Bateman:
$$\dot{N}_i(t) = -\lambda_i N_i(t) + \lambda_{i-1} N_{i-1}(t)$$
Tomando que $\lambda_0 = N_0(t) = 0$, encontre a solução para $N_1(t)$, $N_2(t)$ e $N_3(t)$ com condições iniciais arbitrárias:
$$\begin{cases} N_1(0) = N_{10} \\ N_2(0) = N_{20} \\ N_3(0) = N_{30} \end{cases}$$

12. Ao nível quântico, um oscilador harmônico pode ser descrito pelas seguinte equação diferencial
$$H\psi(x) = E\psi(x),$$
onde E é a energia do sistema e
$$H = \frac{1}{2m}\left(-i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \frac{m\omega^2}{2}x^2.$$

(a) Escreva explicitamente a equação diferencial satisfeita por $\psi(x)$. Esta equação caracteriza um problema de Sturm-Liouville? Se sim, reescreva-o na forma canônica.

(b) Considere as variáveis adimensionais dadas por

$$x = by, \quad b = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}, \quad \epsilon = \frac{mEb^2}{\hbar^2} = \frac{E}{\hbar\omega}.$$

Use as definições acima para encontrar a equação diferencial satisfeita por $\psi(y)$.

(c) Tome $y \to \pm\infty$ e conclua que neste limite a equação diferencial é satisfeita por

$$\psi(y) \sim e^{-y^2}, \quad \psi(y) \sim e^{y^2}.$$

Por razões físicas, apenas a primeira solução acima é válida.

(d) Levando o resultado do item anterior em conta, é razoável escrever a solução completa como

$$\psi(y) = u(y)e^{-y^2/2},$$

onde $u(y)$ é uma função arbitrária a ser determinada. Qual a equação diferencial satisfeita por $u(y)$?

(e) Utilizando o método de Frobenius, isto é, escrevendo $u(y)$ como uma série de potências,

$$u(y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n y^n,$$

encontre a relação de recursão para os coeficientes c_n.

(f) Há algum problema com as relações de recursão encontradas no item anterior?

(g) Para resolver o problema encontrado no item anterior, é necessário truncar a série de potências. Que condição é necessária impor sobre E, a energia do sistema, para que isso aconteça? Quais são as consequências físicas?

13. Considere o operador de Sturm-Liouville na sua forma não-canônica:

$$\mathscr{L} = \alpha(x)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \beta(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \gamma(x),$$

com α, β e γ funções reais. Além disso, tome o produto interno entre duas funções f e g com peso $w(x) > 0$ sendo

$$\langle f|g\rangle_w \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\ f^*(x)g(x)w(x).$$

(Note que aqui estamos considerando funções f definidas em todo o espaço e que devem satisfazer

$$\langle f|f\rangle_w = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\ |f(x)|^2 w(x) < \infty,$$

ou seja, que são integráveis em $[-\infty, \infty]$.)

(a) Usando a condição de hermiticidade de $\mathscr{L}$, isto é,

$$\langle \mathscr{L} f|g\rangle_w = \langle f|\mathscr{L} g\rangle_w\,,$$

mostre que

$$\Big[w\alpha\Big(f^*g' - gf^{*\prime}\Big)\Big]_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

$$(w\alpha)' = w\beta.$$

Desta forma fica evidente que a escolha do peso $w(x)$ é crucial para garantir que $\mathscr{L}$ seja hermitiano.

(b) Com a segunda condição obtida em (a), determine $w(x)$ em termos de α e β. Dica: resolva para $w\alpha$.

(c) Considere agora o problema de Sturm-Liouville dado por

$$\mathscr{L} Q_n = \lambda_n Q_n,$$

onde $Q_n(x)$ é um *polinômio* de grau n e λ_n o autovalor correspondente. Neste caso, qual a forma mais geral que as funções α, β e γ podem admitir? É possível que β seja identicamente nula sem violar as condições de hermiticidade?

(d) Um caso particular da situação descrita em (c) é definido por

$$\alpha(x) = 1,$$

$$\beta(x) = \beta_0 x,$$

$$\gamma(x) = 0,$$

com $\beta_0 < 0$ um número real. Determine para este caso o peso w adequado usando o resultado do item (b). Quais são os polinômios definidos por este peso? Dica: compare os resultados com o Exc. 11.