Lista 4: CDCI2

Turmas: 2AEMN e 2BEMN

Prof. Alexandre Alves
Universidade São Judas Tadeu

1 Integrais triplas sobre caixas retangulares

Exercício 1: Calcule a integral tripla sobre a caixa retangular indicada em cada item:

$$
\begin{array}{ll}
(a) & f(x,y,z) = x+y+z \;\;,\;\; B = \{(x,y,z) \in R^3 | -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 0\} \\
(b) & f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 \;\;, B = \{(x,y,z) \in R^3 | -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 0\} \\
(c) & g(x,y,z) = xyz \;\;,\;\; B = \{(x,y,z) \in R^3 | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\} \\
(d) & g(x,y,z) = (x+y)^2 z + (x+z)^2 y + (y+z)^2 x \;\;,\;\; B = \{(x,y,z) \in R^3 | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\} \\
(e) & f(x,y,z) = (x+y+z)^3 \;\;,\;\; B = \{(x,y,z) \in R^3 | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\} \\
(f) & f(x,y,z) = e^{x+y+z} \;\;,\;\; B = \{(x,y,z) \in R^3 | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\} \\
(g) & f(x,y,z) = e^{2x} \sin(y) \ln(z) \;\;,\;\; B = \{(x,y,z) \in R^3 | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \pi, 1 \leq z \leq e\} \\
(h) & g(x,y,z) = \cos(u+v+w) \;\;,\;\; B = \{(u,v,w) \in R^3 | 0 \leq u \leq \pi, 0 \leq v \leq \pi, 0 \leq w \leq \pi\} \\
(i) & f(x,y,z) = z(x^2+y^2) \;\;,\;\; B = \{(x,y,z) \in R^3 | 0 \leq x^2+y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 1\} \\
(j) & f(x,y,z) = \dfrac{z}{(x+y)^2} \;\;,\;\; B = \{(x,y,z) \in R^3 | 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 1\}
\end{array}
$$

Exercício 2: Calcule a integral da função $F(x,y,z) = xy + z^2$ na região do espaço interior à caixa retangular delimitada pelos planos $x = 0$ e $x = 8$, $y = 0$ e $y = 4$, $z = 0$ e $z = 2$ e exterior à caixa retangular delimitada por $x = 2$ e $x = 6$, $y = 1$ e $y = 3$, $z = 0$ e $z = 1$. Dica: Pense em uma caixa com um buraco em seu interior, depois escreva a subtração de duas integrais.

Exercício 3: O valor médio de uma função de 3 variáveis $f(x,y,z)$ sobre uma região sólida G é definido como

$$\overline{f} = \frac{1}{V(G)} \int\int\int_G f(x,y,z) dV$$

onde $V(G) = \int\int\int_G dV$ é o volume da região G. Determine o valor médio das seguintes funções sobre o cubo com lados de comprimento L que está no primeiro octante com um vértice na origem e arestas paralelas aos eixos coordenados:

$$(a) \quad f(x,y,z) = xyz$$

$$
\begin{aligned}
(b) \quad & f(x,y,z) = xye^{-x^2-y^2} \\
(c) \quad & g(x,y,z) = \frac{1}{x+y+z} \\
(d) \quad & g(x,y,z) = \frac{x^2+y^2+z^2}{L^2}
\end{aligned}
$$

Exercício 4: O valor esperado de uma variável aleatória conjunta de três variáveis, $g(x,y,z)$, é dada pela integral

$$E(g) = \int\int\int_S g(x,y,z)P(x,y,z)dV$$

onde $P(x,y,z)$ é a função densidade de probabilidade conjunta em 3 dimensões associada à variável aleatória em questão.

Dado que a probabilidade de sortear um ponto (x,y,z) dentro de um cubo de lado ℓ é a mesma para qualquer ponto dentro do cubo, podemos demonstrar que a função densidade de probabilidade é dada por

$$P(x,y,z) = \frac{1}{\ell^3} \quad .$$

(a) Em primeiro lugar, assumindo que a chance de sortear a componente x é independente das outras duas e vice-versa, podemos assumir que $P(x,y,z)$ é um função separável em suas variáveis: $P(x,y,z) = p(x) \cdot p(y) \cdot p(z)$. Um dos axiomas da teoria de probabilidades afirma que a chance de ocorrência do espaço amostral é de 1(100%). Nesse caso, isso implica

$$\int_0^\ell \int_0^\ell \int_0^\ell P(x,y,z)dV = 1 \quad .$$

Assumindo, portanto, que $P(x,y,z)$ é separável como mostrado acima e que, dado que o espaço amostral em questão é equiprovável, ou seja, qualquer ponto dentro do cubo tem a mesma chance de ser sorteado: $p(x) = p(y) = p(z) = p$ uma constante, mostre que:

$$P(x,y,z) = \frac{1}{\ell^3} \quad .$$

(b) Calcule o valor médio do quadrado da distância de um ponto (x,y,z) sorteado ao acaso dentro desse cubo em relação a um de seus vértices. Para facilitar as contas assuma que esse vértice está sobre a origem e que o cubo está no primeiro octante.

2 Integrais triplas sobre regiões genéricas

Exercício 5: Calcule as seguintes integrais triplas:

$$(a)\quad \int_0^1 \int_0^z \int_0^{x+z} 6xzdV$$

$$(b)\quad \int_1^2 \int_0^x \int_0^{1-y} x^3y^2zdV$$

$$(c)\quad \int_0^1 \int_0^z \int_0^y ze^{-y^2}dV$$

$$(d)\quad \int_0^1 \int_0^{3y} \int_0^{3-3x-y} dV$$

$$(e)\quad \int_0^7 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{x}{z+1}dydxdz$$

$$(f)\quad \int_0^{\pi/4} \int_0^{\ln(\sec y)} \int_{-\infty}^{2z} e^x dV$$

$$(g)\quad \int_0^1 \int_0^x \int_x^{2x} yz\cos(x^5)dV$$

$$(h)\quad \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} \int_0^{1+x+y} 6xydV$$

$$(i)\quad \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_{x-y}^{x+y} \cos(z)dV$$

$$(j)\quad \int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^{x+y^2} dV$$

Exercício 6: Calcule as integrais triplas

(a) $f(x,y,x) = x$, $B =$ a região delimitada pelos planos: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $3x + 2y + z = 6$

(b) $f(x,y,x) = xy$, $B =$ o tetraedo sólido com vértices: $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,2,0)$ e $(0,0,3)$

(c) $f(x,y,x) = z$, $B =$ a região delimitada pelos planos: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0, z + y = 1$ e $z + x = 1$

(d) $f(x,y,z) = x + z$, onde a região de integração é limitada por:

$$z = 0, z = \left\{ \begin{array}{ll} y, & \text{se } 0 \leq y \leq 2 \\ -y/2 + 3, & \text{se } 2 < y \leq 4 \end{array} \right\} \ , \quad 0 \leq x \leq 5$$

Exercício 7: O volume de um carro, em m^3, pode ser estimado modelando-se o

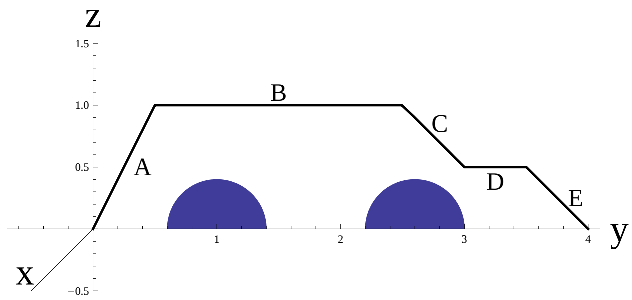

Figura 1: Exercício 7. Volume de um carro.

seu espaço interior através da região do R^3 dada por

$$\begin{array}{ll} (A) & z = 2y \;\; , \;\; 0 < y < 0.5 \\ (B) & z = 1 \;\; , \;\; 0.5 < y < 2.5 \\ (C) & z = -y + 3.5 \;\; , \;\; 2.5 < y < 3 \\ (D) & z = 0.5 \;\; , \;\; 3 < y < 3.5 \\ (E) & z = -y + 4 \;\; , \;\; 3.5 < y < 4 \;\; , \end{array}$$

e largura dada por $0 < x < 2$. O compartimento das rodas têm raio de 0.4m e espessura de 0.3m, veja a figura, que mostra um corte transversal no plano yz do carro, para uma melhor visualização.

3 Integrais triplas em coordenadas esféricas e cilíndricas

Exercício 8: Calcule as seguintes integrais em coordenadas esféricas

$$\begin{array}{ll} (a) & F(x,y,z) = x \;\; , \;\; G = \{(x,y,z) | x \geq 0 \; , \; x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\} \\ (b) & F(x,y,z) = z \;\; , \;\; G = \{(x,y,z) | z \geq 0 \; , \; 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\} \\ (c) & \displaystyle\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{2} r \cos\phi dV \\ (d) & \displaystyle\int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\sin\phi} dV \\ (e) & \displaystyle\int_0^{\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2} \frac{e^{-r^3}}{\sin\phi} dV \\ (f) & \displaystyle\int_0^{\pi/4} \int_0^{\pi/4} \int_0^{\cos\theta} \cos\phi dV \end{array}$$

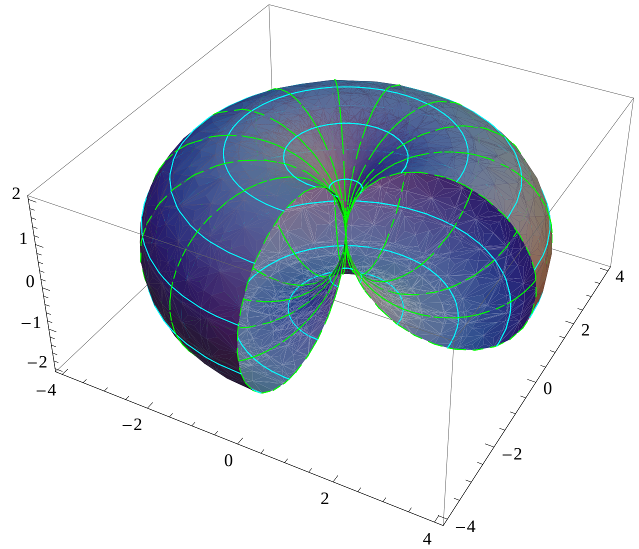

Figura 2: Exercício 9. Volume de um toro.

Exercício 9: Calcule o volume do toro de equação $r = 4\sin\phi$, na região $0 \leq \theta \leq 3\pi/2$, mostrado na figura.

Exercício 10: Calcule as seguintes integrais em coordenadas cilíndricas

$$(a) \quad \int_0^4 \int_0^{\pi/2} \int_0^2 \cos\theta r dr d\theta dz$$

$$(b) \quad \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\cos^2\theta} \int_0^{4-r^2} \sin\theta dV$$

$$(c) \quad \int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_{r^2/3}^{\sqrt{18-r^2}} dV$$

$$(d) \quad \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta/2\pi} \int_0^{3+24r^2} dV$$

$$(e) \quad \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{-1/2}^{1/2} (r^2 \sin^2\theta + z^2) dV$$

Exercício 11: Calcule o volume de um "sorvete de casquinha"delimitado por: $\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq x^2+y^2+z^2$. Dica: procure a resolução no Stewart.

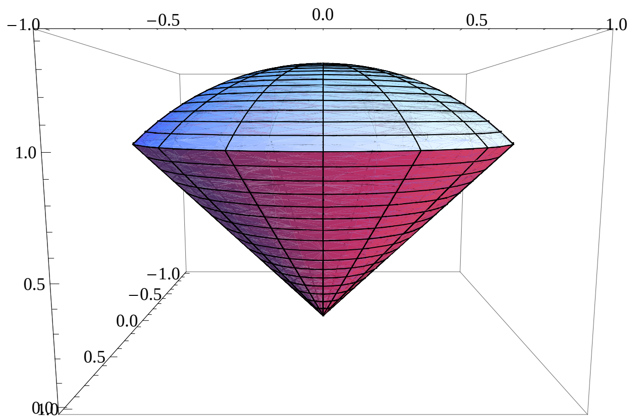

Figura 3: Exercício 10. Volume de um sorvete de casquinha(independentemente do sabor).

Exercício 12: Para quais valores de n a integral tripla

$$\int\int\int_S \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{n/2}} dV \ ,$$

onde S é a região delimitada pelas esferas de raio r e R, com $R > r > 0$, converge no limite $R \to \infty$? Para quais valores de n ela converge se $r \to 0$ com $R < \infty$?

EXERCÍCIOS PARA SEREM ENTREGUES EM 30/05: 1(a,d,f), 3(d), 5(a,f,h), 6(a), 7, 8(a,e), 10(a,b).