Lista de Exercícios 6

Disciplina: CDI1
Turma: 1BEEN

Prof. Alexandre Alves
Universidade São Judas Tadeu

1 Integrais Definidas e Indefinidas

Exercício 1: Calcule a integral indefinida das seguintes funções reais e verifique o resultado por derivação

$$
\begin{array}{ll}
(a) & f(x) = \cos^2(5x) \\
(b) & f(x) = \sqrt{1+\cos(x)} \\
(c) & g(x) = \sin^4(x)\cos^3(x) \\
(d) & g(x) = xe^{-x^2} \\
(e) & h(x) = \sin(x)\sec^2(x) \\
(f) & h(x) = \dfrac{\sec^2(x)}{3+2\tan(x)} \\
(g) & p(x) = \sin^3(x) \\
(h) & p(x) = \dfrac{x}{1+x^4} \\
(i) & q(x) = \dfrac{x^3}{1+x^4} \\
(j) & r(x) = \dfrac{2}{3+2x^2}
\end{array}
$$

Exercício 2: Calcule as seguintes integrais indefinidas e verifique o resultado por derivação

$$
\begin{array}{ll}
(a) & f(x) = x^3\ln(x) \\
(b) & f(x) = \arcsin(x) \\
(c) & f(x) = \ln^2(x) \\
(d) & g(x) = xe^{2x} \\
(e) & g(x) = x\ln^2(x) \\
(f) & h(x) = e^{-sx}\sin(x)\ , \quad s > 0 \\
(g) & h(x) = \sec^4(x) \\
(h) & j(x) = x^2\sin(x)
\end{array}
$$

$$(i) \quad j(x) = (x^3 - x)\cos(x)$$
$$(j) \quad m(x) = (x+1)^2 \cos^2(x)$$

<u>Exercício 3:</u> Calcule as integrais das funções dadas abaixo

$$(a) \quad f(x) = \frac{x}{x^2 - 5x + 6}$$
$$(b) \quad f(x) = \frac{5x^2 + 1}{x - 1}$$
$$(c) \quad f(x) = \frac{x + 3}{(x-1)^2}$$
$$(d) \quad f(x) = \frac{x + 1}{x^2 + 9}$$
$$(e) \quad f(x) = \frac{x^3 + x + 1}{x^2 - 4x + 3}$$
$$(g) \quad f(x) = \frac{x + 5}{x^3 - 4x^2 + 4x}$$
$$(h) \quad f(x) = \frac{2}{(x+2)(x-1)^2}$$
$$(i) \quad g(x) = \frac{4x + 1}{x^2 + 6x + 12}$$
$$(j) \quad g(x) = \frac{3x^2 + 5x + 4}{x^3 + x^2 + x - 3}$$

<u>Exercício 4:</u> Faça a mudança de variável indicada e resolva a integral

$$(a) \quad \int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx \quad , \quad x = \tan\theta$$
$$(b) \quad \int \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}} dx \quad , \quad x + 1 = u^6$$
$$(c) \quad \int \frac{1}{\sqrt{2 + \sqrt{x}}} dx \quad , \quad x = u^2$$
$$(d) \quad \int \frac{\sin(x)}{1 + \sin(x)} dx \quad , \quad u = \tan(x/2)$$
$$(e) \quad \int cossec(x) dx \quad , \quad u = \tan(x/2)$$

Exercício 5: Calcule as seguintes integrais definidas

$$(a)\quad \int_0^{\pi/4} \frac{\sin(\tan(x))}{\cos^2(x)}dx$$
$$(b)\quad \int_0^{\pi/3} [\sin(3x) + \cos(3x)]dx$$
$$(c)\quad \int_0^{\pi/2} [\sin(x) + \cos(x)]^2 dx$$
$$(d)\quad \int_0^{\pi} e^x \sin^2(x) dx$$
$$(e)\quad \int_{-1}^{1} (x^3 - x^2 + x + 1)(x + 1)^2 dx$$
$$(f)\quad \int_{-\pi}^{\pi} [\sin(x) + \cos(x)]^2[\sin(x) - \cos(x)]dx$$
$$(g)\quad \int_{-60}^{60} x^3 e^{-x^8+23} dx$$
$$(h)\quad \int_1^2 \Big(\frac{2x}{x^4 + 1} - \frac{x + 3}{x^2 - 3x + 2} + x^2 \ln(x)\Big)dx$$
$$(i)\quad \int_0^1 x \arcsin(x^2) dx$$
$$(j)\quad \int_2^5 \sqrt{\frac{x + 1}{x^2 - 1}}dx$$

Exercício 6: Calcule a área entre os gráficos de $f(x)$ e $g(x)$ nos casos a seguir e faça um esboço da região da qual você está calculando a área

(a) $f(x) = -x^2 + 1$ e $g(x) = x$ desde $x = 0$ até o ponto onde f e g se interceptam
(b) $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = -x + 1$ desde $x = 0$ até $x = 1$
(c) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ e $g(x) = |x|$ entre os pontos onde f e g se interceptam
(d) $f(x) = x$ e $g(x) = \ln(x) + 1$ desde $x = 1/e$ até o ponto onde f e g se interceptam
(e) $f(x) = \sin(x)$ e $g(x) = \cos(x)$ entre os ponto onde f e g se interceptam pela primeira vez com $x > 0$

Exercício 7: Um corpo sofre a ação de uma força que depende de sua posição x atavés da expressão

$$F(x) = e^{-x}[10 \sin(x) - 5 \cos(x)]\ .$$

Calcule o trabalho realizado por essa força para levar o corpo do ponto $x = 0$ até o ponto $x = 2$. Escreva a equação que define os pontos onde trabalho realizado pela força é nulo quando o corpo parte de origem $x = 0$?

Exercício 8: O comportamento temporal de circuitos elétricos que possuem combinações de resistores, baterias e indutores é governado por uma equação diferencial de segunda ordem cuja solução pode ser encontrada, nos casos mais difíceis, pelo chamado método da transformada de Laplace.

A transformada de Laplace de uma função $f(t)$, por sua vez, é definida como

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad , \quad s > 0 \ .$$

Calcule a transformada de Laplace das seguintes funções:

$$\begin{aligned} &(a) \quad f(t) = \alpha \quad , \quad \alpha \text{ constante} \\ &(b) \quad f(t) = t \\ &(c) \quad f(t) = e^{\alpha t} \\ &(d) \quad f(t) = \sin(\alpha t) \\ &(e) \quad f(t) = \cos(\alpha t) \end{aligned}$$

Quando necessário use o Teorema do Confronto, o qual afirma que

$$\lim_{x \to a} h(x) g(x) = 0$$

se $\lim_{x \to a} h(x) = 0$ e $g(x)$ é uma função limitada em todo o domínio de definição das funções h e g.

Exercício 9: A série trigonométrica

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

é denominada a série de Fourier de uma função $f(x)$ quando os coeficientes a_n e b_n são dados por

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad , \quad n \geq 0 \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin(nx) dx \quad , \quad n > 0 \end{aligned}$$

e a série converge para

$$\frac{1}{2} [\lim_{x \to a^+} f(x) + \lim_{x \to a^-} f(x)]$$

em um dado ponto $x = a$.

Mostre que a série de Fourier de $f(x) = x^2$ no intervalo $-\pi < x < \pi$ é dada por

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos(nx) \quad .$$

Agora use esse resultado para mostrar que

$$\frac{\pi^2}{3} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{4}{n^2}$$

fazendo $x = 0$ no desenvolvimento em série de Fourier de $f(x) = x^2$. Finalmente, use o resultado acima para estimar o valor de π somando até o nono termo da série.

Exercício 10: Uma variável aleatória X é distribuída de acordo com a f.d.p.

$$P_X(x) = a \sin(x) \quad , \quad 0 < x < \pi \quad .$$

(a) Qual deve ser o valor de a para que essa f.d.p. seja aceitável do ponto de vista da teoria de probabilidades?
(b) Qual a chance de que $\pi/3 < x < 4\pi/5$ em um experimento aleatório?
(c) Qual a chance de $x = \pi/2$ exatamente?

Exercício 11: A chamada distribuição normal, ou Gaussiana, de probabilidades é uma f.d.p. dada por

$$N(\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad .$$

Mostre que o valor esperado de X que segue uma f.d.p. normal, dado pela integral,

$$\langle X \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x N(\mu, \sigma^2) dx$$

é $\langle X \rangle = \mu$, e que a variância de X, dada por

$$S_X^2 = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \langle X \rangle)^2 N(\mu, \sigma^2) dx$$

é $S_X^2 = \sigma^2$.

EXERCÍCIOS PARA SEREM ENTREGUES: 1(b,d,h),2(c,d,f),3(a,e,i),4(b,d),8.
DATA IMPRORROGÁVEL: 19 de Novembro(data da prova semestral).